

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ - CLASA A VII-A
SOLUȚII ȘI BAREM ORIENTATIV**

Problema 1. Se consideră numărul $x = 2024 - \frac{1+2+3+\dots+2023}{\sqrt{1+3+5+\dots+2023}}$.

a) Demonstrați că numărul x este natural.

b) Arătați că numărul $y = (x + \sqrt{3})\sqrt{5 - \sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}$ este mai mic decât $\sqrt{5}$.

Prof. Camelia Frâncu

Soluție:

$$a) 1+2+3+\dots+2023 = \frac{(2023+1) \cdot 2023}{2} = 1012 \cdot 2023 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$1+3+5+\dots+2023 = \frac{(2023+1) \cdot 1012}{2} = 1012^2 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$x = 2024 - \frac{1012 \cdot 2023}{\sqrt{1012^2}} = 1 \in \mathbb{N} \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$b) \sqrt{13+4\sqrt{3}} = \sqrt{(2\sqrt{3}+1)^2} = |2\sqrt{3}+1| = 2\sqrt{3}+1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\sqrt{5-(2\sqrt{3}+1)} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$y = (1+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1) = 2 < \sqrt{5} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

Problema 2. Arătați că numărul $p = \sqrt{2023^{2n} + 2024^{n+2}}$ este irational, oricare ar fi n număr natural.

Prof. Mirela Mihaela Tarță

Soluție:

Cazul I. $n = 4k, k \in \mathbb{N}, u(2023^{8k}) = 1, u(2024^{4k+2}) = 6, u(2023^{8k} + 2024^{4k+2}) = 7 \Rightarrow p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
.....2 puncte

Cazul II. $n = 4k+1, k \in \mathbb{N}, u(2023^{8k+2}) = 9, u(2024^{4k+3}) = 4, u(2023^{8k+2} + 2024^{4k+3}) = 3 \Rightarrow p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
.....2 puncte

Cazul III. $n = 4k+2, k \in \mathbb{N}, u(2023^{8k+4}) = 1, u(2024^{4k+4}) = 6, u(2023^{8k+4} + 2024^{4k+4}) = 7 \Rightarrow p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
.....2 puncte

Cazul IV. $n = 4k+3, k \in \mathbb{N}, u(2023^{8k+6}) = 9, u(2024^{4k+5}) = 4, u(2023^{8k+6} + 2024^{4k+5}) = 3 \Rightarrow p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
.....1 punct

Problema 3. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și M mijlocul segmentului BC .
Determinați măsura unghiului BAD , știind că $MA \perp MD$, $\angle ADM = 15^\circ$ și $AB + CD = AD$.

(Gazeta Matematică nr. 10/2017)

Soluție:

$\{D'\} = \text{sim}_M \{D\}, \triangle ADD' - \text{isoscel} \Rightarrow AD \equiv AD', \angle D'AD = 2 \cdot 75^\circ = 150^\circ \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$
 $BM \equiv MC, D'M \equiv MD \Rightarrow BDCD' - \text{pgm} \Rightarrow BD' \equiv CD \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
 $AD = AB + CD = AB + D'B = AD' \Rightarrow D', B, A - \text{coliniare} \Rightarrow \angle BAD = 150^\circ \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$

Problema 4. Fie un paralelogram $ABCD$ cu $\angle ADB > 90^\circ$ și punctele A', C' sunt simetricele punctelor A și C față de dreapta BD , respectiv B', D' simetricele punctelor B și D față de dreapta AC . Să se arate ca $A'B'C'D'$ este paralelogram.

Prof. Mirela Mihaela Tarță

Soluție:

a $\triangle ADD' \equiv \triangle BCB' (\text{isoscele}) \Rightarrow \angle ADD' \equiv \angle B'BC$
 $\triangle ADA' \equiv \triangle CBC' (\text{isoscele}) \Rightarrow \angle A'DA \equiv \angle C'BC \dots\dots\dots 3 \text{ puncte}$
 $\triangle A'DD' \equiv \triangle C'BB' \Rightarrow A'D' \equiv B'C' \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$
 $AA'CC' - \text{pgm} \Rightarrow AC' \equiv A'C, \angle A'AC' \equiv \angle A'CC'$
 $\triangle D'AC' \equiv \triangle B'CA' \Rightarrow D'C' \equiv A'B' \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$
 $A'D' \equiv B'C', A'B' \equiv D'C' \Rightarrow A'B'C'D' - \text{paralelogram} \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$