



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024**  
**CLASA a IX-a**

**SUBIECTUL I (7puncte)**

Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuația  $x \cdot \left[ \frac{1}{x} \right] + \frac{1}{x} \cdot [x] = 2$ .

**SUBIECTUL II (7puncte)**

Fie  $a, b, c > 0$ . Arătați că  $\frac{a+b+c}{2} + \frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq 3$ .

(GM 4/2023)

**SUBIECTUL III (7puncte)**

Fie  $P$  un punct în interiorul unui triunghi echilateral de centru  $O$ . Dacă  $P_1, P_2, P_3$  sunt proiecțiile lui  $P$  pe laturile triunghiului, arătați că  $\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{PP_2} + \overrightarrow{PP_3} = \frac{3}{2} \overrightarrow{PO}$ .

**SUBIECTUL IV (7puncte)**

Prin mijlocul  $E$  al bisectoarei  $[AD]$  a triunghiului  $ABC$  se duce o dreaptă care intersectează laturile  $[AB]$  și  $[AC]$  în punctele  $M$ , respectiv  $N$ . Arătați că

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} = 2 \left( \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right).$$

**Notă:**

- **Timp de lucru 3 ore;**
- **Toate subiectele sunt obligatorii.**