



# OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ ETAPA LOCALĂ – 10.02.2024

## CLASA a X-a

### BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

#### SUBIECTUL I (7puncte)

Fie  $a, b, c \in (1, \infty)$ . Să se arate că:  $\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{a+c}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 1$ .

#### Soluție:

Oficiu.....	1p
Aplică inegalitatea mediilor pentru fiecare fracție.....	2p
Scoate exponentul $\frac{1}{2}$ în fața logaritmului .....	1p
Aplică din nou inegalitatea mediilor pentru suma de logaritmi.....	2p
Finalizare .....	2p

#### SUBIECTUL II (7puncte)

Fie  $\alpha \in \mathbb{C}$  o soluție a ecuației  $x^2 - x + 1 = 0$ .

(3p) a) Verificați dacă  $\alpha$  este o soluție a ecuației  $x^{76} - x^{96} - x^{17} + 2 = 0$ .

(4p) b) Fie  $n \in \mathbb{N}$  astfel ca  $\alpha^{4n} + \alpha^{2n} + 1 = 0$ . Arătați că  $n$  nu este divizibil cu 3.

(Supliment Gazeta Matematică)

#### Soluție:

Oficiu.....	1p
a) Obține $\alpha^3 = -1$ .....	1p
Calculează $\alpha^{76} - \alpha^{96} - \alpha^{17} + 2 = \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$ .....	2p
b) Presupunem că $n=3k$	
$\alpha^{4n} = \alpha^{12k} = (\alpha^3)^{4k} = 1$ .....	1p
$\alpha^{2n} = 1$ .....	1p
Finalizare.....	1p

#### SUBIECTUL III (7puncte)

Fie  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ .

(4p) a) Dacă  $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ , să se arate că  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ .

(3p) b)  $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$  și  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$ , atunci  $|z_1 + z_2 + z_3| = 2$ .

#### Soluție:

Oficiu.....	1p
a) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1)$ .....	1p
$\bar{z}_k = \frac{1}{z_k}$ .....	1p
$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2\overline{(z_1 + z_2 + z_3)} (1)$ .....	1p



Finalizare .....1p  
 b) În relația (1) trecem la module .....1p  
 Finalizare.....1p

**SUBIECTUL IV (7puncte)**

Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 - mx + 2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}$ . Să se determine valorile reale ale

lui  $m$  pentru care:

(4p) a)  $f$  este injectivă;

(3p) b)  $f$  este surjectivă.

**Soluție:**

Oficiu.....1p

a)  $f$  injectivă pe  $(-\infty, 1]$  înseamnă  $x_V = \frac{m}{2} \geq 1$ .....2p

și  $3 - m \geq 0$  .....1p

Finalizare  $m \in [2, 3]$ .....1p

b) Se disting două cazuri:

Caz I)  $\begin{cases} \frac{m}{2} \geq 1 \\ 3 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 3$ .....1p

Caz II)  $\begin{cases} \frac{m}{2} < 1 \\ \frac{-\Delta}{4a} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty, 2\sqrt{2}]$ .....1p

**Notă:**

- Timp de lucru 3 ore;
- Toate subiectele sunt obligatorii.