

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

9 februarie 2025

CLASA a X-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1.

Calculați numărul $A = [\lg 1] + [\lg 2] + [\lg 3] + [\lg 4] + \dots + [\lg 2025]$.

Soluție:

$$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall x \in [10^a, 10^{a+1}) \Rightarrow a \leq \lg x < a+1 \Rightarrow [\lg x] = a \dots\dots\dots 1p$$

$$k \in [1, 10) \Rightarrow 0 \leq \lg k < 1, \forall k = \overline{1, 9} \Rightarrow [\lg k] = 0, \forall k = \overline{1, 9} \dots\dots\dots 1p$$

$$k \in [10, 100) \Rightarrow 1 \leq \lg k < 2, \forall k = \overline{10, 99} \Rightarrow [\lg k] = 1, \forall k = \overline{10, 99} \dots\dots\dots 1p$$

$$k \in [10^2, 10^3) \Rightarrow 2 \leq \lg k < 3, \forall k = \overline{100, 999} \Rightarrow [\lg k] = 2, \forall k = \overline{100, 999} \dots\dots\dots 1p$$

$$k \in [10^3, 10^4) \Rightarrow 3 \leq \lg k < 4, \forall k = \overline{1000, 2025} \Rightarrow [\lg k] = 3, \forall k = \overline{1000, 2025} \dots\dots\dots 1p$$

$$A = \sum_{k=1}^9 [\lg k] + \sum_{k=10}^{99} [\lg k] + \sum_{k=100}^{999} [\lg k] + \sum_{k=1000}^{2025} [\lg k] = \dots\dots\dots 2p$$

$$= 0 + 1 \cdot 90 + 2 \cdot 900 + 3 \cdot 1026 = 4968$$

SUBIECTUL 2.

Se consideră ecuația $|z|^2 + 2iz + 2a(1-i) = 0, z \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile întregi ale lui a astfel încât ecuația să aibă soluții.

Soluție:

$$\text{Cum } z \text{ este număr complex rezultă că } z = x + iy, x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Ecuația devine } x^2 + y^2 - 2y + 2a + 2i(x - a) = 0 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci } \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y + 2a = 0 \\ x - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 - 2y + a^2 + 2a = 0 \\ x = a \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Ecuația dată are soluții complexe dacă ecuația } y^2 - 2y + a^2 + 2a = 0 \text{ are soluții reale} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Delta_y \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 1 \leq 0 \Leftrightarrow a \in [-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}] \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dar } a \text{ este număr întreg, deci } a \in \{-2, -1, 0\} \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 3.

Determinați numerele naturale x și y astfel încât $(2 + \sqrt{3})^x - (4 - 2\sqrt{3})^y = 3 + 6\sqrt{3}$.

Soluție:

$$(2 + \sqrt{3})^x = (4 - 2\sqrt{3})^y + 3 + 6\sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } 4 - 2\sqrt{3} \in (0, 1) \Rightarrow (4 - 2\sqrt{3})^y \in (0, 1) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Deci, } 3 + 6\sqrt{3} < (2 + \sqrt{3})^x < 4 + 6\sqrt{3} \dots\dots\dots 1p$$

Pentru $x \in \{0, 1\}$ nu este verificată prima inegalitate, iar pentru

$$x \geq 3 \Rightarrow x \in (2 + \sqrt{3})^x \geq (2 + \sqrt{3})^3 > 4 + 6\sqrt{3}, \text{ deci nu este verificată a doua inegalitate} \dots\dots 2p$$

$$\text{Pentru } x = 2, \text{ obținem } 3 + 6\sqrt{3} < 7 + 4\sqrt{3} < 4 + 6\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\sqrt{3} < 4 < 1 + 2\sqrt{3} \text{ (A).}$$

$$\text{Obținem } (4 - 2\sqrt{3})^y = 4 - 2\sqrt{3} \Rightarrow y = 1. \text{ Deci } x=2 \text{ și } y=1 \dots\dots\dots 2p$$

SUBIECTUL 4.

Să se arate că nu există funcții injective $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(3^x) + f(2^x) = 1$ pentru orice număr real x .

Soluție:

Presupunem că există funcții injective cu proprietatea dată. Atunci pentru $x = 1 \Rightarrow f(3) + f(2) = 1$ (1) 1p

Ecuația $2^x = 3$ are soluție unică $\alpha = \log_2 3 \dots\dots\dots 2p$

$$\text{Pentru } x = \alpha \Rightarrow f(3^\alpha) + f(2^\alpha) = 1 \Rightarrow f(3^\alpha) + f(3) = 1 \text{ (2)} \dots\dots\dots 2p$$

Din (1) și (2) rezultă $f(3^\alpha) = f(2)$. Cum f este injectivă, rezultă că $3^\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = \log_3 2$ absurd.....2p