

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-VRANCEA

9 februarie 2025

CLASA a VI-a

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

SUBIECTUL 1.

Determinați numerele x, y, z știind că $\frac{x}{2}, \frac{y}{3}, \frac{z}{5}$ sunt direct proporționale cu 2, 3 și 5, iar $2x+3y+5z=320$. Câți divizori proprii are produsul $P=xyz$?

Soluție:

$\frac{x}{2}, \frac{y}{3}, \frac{z}{5}$ sunt direct proporționale cu 2, 3 și 5 $\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{9} = \frac{z}{25} = k$ 1p
 $x=4k, y=9k, z=25k$1p
 $2x+3y+5z=320 \Rightarrow 160k=320 \Rightarrow k=2$1p
 $x=8, y=18, z=50$1p
 $P=8 \cdot 18 \cdot 50 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ 1p
 Numărul divizorilor lui P este egal cu $(5+1) \cdot (2+1) \cdot (2+1) = 54$ 1p
 Numărul divizorilor proprii este egal cu $54-2=52$1p.

SUBIECTUL 2.

Aflați numerele prime p, q, r știind că $p^{10} + 10^{p+1} = p^3 \cdot q \cdot r$.

Soluție:

p, q, r prime $\Rightarrow p \geq 2, q \geq 2, r \geq 2$ 1p
 $p^{10} : p, p^3 \cdot q \cdot r : p \Rightarrow 10^{p+1} : p$ 1p
 $10^{p+1} = 2^{p+1} \cdot 5^{p+1} \Rightarrow p=2$ sau $p=5$ 1p
 Cazul 1: $p=2 \Rightarrow 2^{10} + 10^3 = 2^3 \cdot q \cdot r \Rightarrow q \cdot r = 253 = 11 \cdot 23 \Rightarrow q=11$ și $r=23$ sau $q=23$ și $r=11$...1p
 Cazul 2: $p=5 \Rightarrow 5^{10} + 10^6 = 5^3 \cdot q \cdot r \Rightarrow 5^3 \cdot (5^7 + 2^6 \cdot 5^3) = 5^3 \cdot q \cdot r$ 1p
 $\Rightarrow q \cdot r = 5^3 (5^4 + 2^6) = 5^3 \cdot 689 = 5^3 \cdot 13 \cdot 53$ care nu este produs de 2 numere naturale prime.....1p
 Soluția: $p=2, q=11, r=23$ sau $p=2, q=23, r=11$ 1p

SUBIECTUL 3.

Considerăm unghiurile $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_nOA_{n+1}, \angle A_{n+1}OA_1$ în jurul punctului O, astfel încât $\angle A_1OA_2 = 1^\circ, \angle A_2OA_3 = 2^\circ, \angle A_3OA_4 = 3^\circ, \dots, \angle A_nOA_{n+1} = n^\circ$. Dacă $\angle A_{n+1}OA_1 = 9^\circ$ găsiți valoarea lui n.

Soluție:

unghiurile $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_nOA_{n+1}$ în jurul punctului O \Rightarrow

$$\angle A_1OA_2 + \angle A_2OA_3 + \angle A_3OA_4 + \dots + \angle A_nOA_{n+1} + \angle A_{n+1}OA_1 = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow 1^\circ + 2^\circ + \dots + n^\circ + 9^\circ = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right)^\circ + 9^\circ = 360^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$(n \cdot (n+1))^\circ = 702^\circ \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Deoarece } 702 = 26 \cdot 27 \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{și } n \cdot (n+1) \text{ este produs de numere naturale consecutive} \Rightarrow n=26 \dots\dots\dots 1p$$

SUBIECTUL 4.

Fie unghiul ascuțit $\angle AOB$, bisectoarea sa (OC și semidreapta (OD în semiplanul determinat de dreapta OC, care nu conține punctul B, astfel încât $OD \perp OC$. Se consideră semidreapta (OE perpendiculară pe bisectoarea (OM a unghiului $\angle AOD$. Aflați câte valori posibile de numere naturale poate avea măsura unghiului $\angle AOB$ astfel încât $(OE \subset \text{Int}(\angle AOB))$.

Soluție:

Deoarece (OC este bisectoarea $\angle AOB \Rightarrow \angle AOC = \angle COB = x \Rightarrow$

$$\angle AOD = 90^\circ - x \dots\dots\dots 1p$$

$$(\text{OM bisectoarea } \angle AOD \Rightarrow \angle DOM = \angle MOA = 45^\circ - \frac{x}{2} \dots\dots\dots 1p$$

$$\angle MOE = 90^\circ \Rightarrow 90^\circ = 45^\circ - \frac{x}{2} + 2x - \angle BOE \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \angle BOE = \frac{3x}{2} - 45^\circ \dots\dots\dots 1p$$

$$(\text{OE} \subset \text{Int}(\angle AOB) \Rightarrow \angle BOE > 0 \Rightarrow 3x > 90 \Rightarrow x > 30 \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 2x > 60 \Rightarrow \angle AOB \in \{61^\circ, 62^\circ, \dots, 89^\circ\} \dots\dots\dots 1p$$

$$\Rightarrow \text{există } 89 - 61 + 1 = 29 \text{ de valori} \dots\dots\dots 1p$$