

## OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

### ETAPA LOCALĂ – VRANCEA

9 februarie 2025

CLASA a VIII-a

#### SUBIECTUL 1.

Arătați că:

a)  $\frac{3}{\sqrt{n(n+3)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}}$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}^*$

b)  $x = \frac{3}{\sqrt{1 \cdot 4}(\sqrt{1} + \sqrt{4})} + \frac{3}{\sqrt{4 \cdot 7}(\sqrt{4} + \sqrt{7})} + \dots + \frac{3}{\sqrt{166 \cdot 169}(\sqrt{166} + \sqrt{169})} \in \mathbb{Q}$

Soluție

a) Amplificarea fracției  $\frac{3}{\sqrt{n(n+3)}(\sqrt{n} + \sqrt{n+3})}$  cu conjugata  $\sqrt{n} - \sqrt{n+3}$  1p

$$\frac{3(\sqrt{n} - \sqrt{n+3})}{\sqrt{n(n+3)} \cdot (-3)} = \frac{-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+3)}} + \frac{\sqrt{n+3}}{\sqrt{n(n+3)}} \quad 1p$$

Finalizare 1p

b) Scrierea termenilor lui x cu ajutorul lui a 2p

$$x = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{\sqrt{166}} - \frac{1}{\sqrt{169}} \quad 1p$$

$$x = 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13} \quad 1p$$

#### SUBIECTUL 2.

Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $y - 1 = 2x$  și  $y \in [1, 3]$ .

a) Să se arate că  $x \in [0, 1]$ .

b) Să se arate că:

$$a = \sqrt{x^2 + 1 + y^2 - 2y} + \sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} = \sqrt{5}$$

Soluție

a)  $y \in [1, 3] \Rightarrow 1 \leq y \leq 3 \mid (-1) \Rightarrow 0 \leq y - 1 \leq 2$  1p

$$0 \leq 2x \leq 2 \mid : 2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad 1p$$

b)  $a = \sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2}$

$y - 3 = 2(x-1) ; y - 1 = 2x$  1p

$a = \sqrt{x^2 + 4x^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 4(x-1)^2}$  1p

$a = \sqrt{5}|x| + \sqrt{5}|x-1|$  1p

$x \in [0,1] \Rightarrow |x| = x$

$|x-1| = 1-x$  1p

Finalizare 1p

### SUBIECTUL 3.

Fie  $ABCD$  un tetraedru cu baza  $BCD$  triunghi echilateral, iar  $G_1$  și  $G_2$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $ABD$  respectiv  $ACD$ .

a) Arătați că  $G_1 G_2 \parallel (BCD)$

b) Considerăm o dreaptă  $PQ$ ,  $P \in (CD)$  și  $Q \in (BC)$  ce conține centrul bazei. Arătați că  $AC \parallel (G_1 PQ)$ .

Supliment Gazeta matematică nr. 10/2024

Soluție

a) Dacă  $M, N$  mijloacele  $[BD], [DC] \Rightarrow \frac{AG_1}{G_1 M} = \frac{AG_2}{G_2 N} = 2$  1p

Reciproca Th. Thales  $\Rightarrow G_1 G_2 \parallel MN$  1p

Finalizare 1p

b)  $G \rightarrow$  centrul bazei  $\Delta BCD$  echilateral  $\rightarrow G \rightarrow$  centrul de greutate al  $\Delta BCD$  1p

$G \in PQ \Rightarrow G_1 G \subset (G, PQ)$  1p

$\frac{G_1 M}{G_1 A} = \frac{MG}{GC} = \frac{1}{2} \Rightarrow$  Reciproca Th. Thales  $G_1 G \parallel AC$  1p

Finalizare 1p

**SUBIECTUL 4.**

Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$ . Dacă  $AC \cap BD = \{O\}$ , iar punctul  $M$  este centrul de greutate al triunghiului  $BCB'$ , arătați că  $D'O \perp (AMC)$ .

Soluție

a)  $\triangle D'AC$  echilateral 2pO mijlocul lui  $AC \Rightarrow D'O \perp AC$  1pb) P mijlocul lui  $BB' \Rightarrow OP \in (MAC)$  1p

Dacă latura pătratului = a atunci

$$D'O = \frac{a\sqrt{6}}{2} \quad OP = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad D'P = \frac{3a}{2} \quad 1p$$

Reciproca Th. Pitagora în  $\triangle D'OP \Rightarrow D'O \perp OP$  1p

Finalizare 1p

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

Propunători:

prof. PREDA CĂTĂLIN, Colegiul Național „Unirea” Focșani

prof. BAICIU IULIANA, Școala Gimnazială „Anghel Saligny” Focșani