

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală- clasa a XII-a

9 februarie 2025

Barem evaluare și de notare

Subiectul I

Să se calculeze: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arccot} x \right) dx$

Soluție și barem :

Fie $f : \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arccot} x$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(- \frac{\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)'}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^2}} + \left(- \frac{1}{1+x^2} \right) \right) \dots\dots\dots 2p$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ este funcția constantă 1p

Cum $f(1) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{\pi}{2}, (\forall) x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ 1p

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = \frac{\pi}{2} \cdot x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\pi}{4} \dots\dots\dots 3p$$

Subiectul al II-lea

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă cu derivata continuă, astfel încât $f(a)=0$ și $0 \leq f'(x) \leq 1, (\forall) x \in [a, b]$. Să se demonstreze că:

$$\int_a^b f^7(t) dt \leq 2 \left(\int_a^b f(t) dt \right)^4$$

(G.M.)

Soluție și barem :

Fie $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2 \left(\int_a^x f(t) dt \right)^4 - \int_a^x f^7(t) dt$ 1p

f continuă $\Rightarrow F$ derivabilă cu $F'(x) = 8 \cdot \left(\int_a^x f(t) dt \right)^3 \cdot f(x) - f^7(x)$ 2p

$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ crescătoare $\Rightarrow f(x) \geq f(a) = 0, (\forall) x \in [a, b]$ 1p

Pentru $(\forall) x \in [a, b]$ și $(\forall) t \in [a, x]$ avem $f(t) \geq f(t) \cdot f'(t)$ 1p

Deci $\int_a^x f(t) dt \geq \frac{f^2(t)}{2} \Big|_a^x = \frac{f^2(x)}{2} \geq 0, (\forall) x \in [a, b]$ 1p

Obținem: $F'(x) \geq 8 \cdot \frac{f^6(x)}{8} \cdot f(x) - f^7(x) = 0, (\forall)x \in [a, b] \Rightarrow F$ crescătoare $\Rightarrow F(b) \geq F(a) = 0 \Rightarrow \int_a^b f^7(t)dt \leq 2 \left(\int_a^b f(t)dt\right)^4$ 1p

Subiectul al III-lea

Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}^*, (m, n) = 1$, astfel încât $(xy)^m = (yx)^m$ și $(xy)^n = (yx)^n, (\forall)x, y \in G$. Să se arate că (G, \cdot) este grup abelian.

Soluție și barem :

$(m, n) = 1 \Rightarrow (\exists)p, q \in \mathbb{Z} \text{ a. i. } mp + nq = 1$ 1p
 $xy = (xy)^{mp+nq} = ((xy)^m)^p \cdot ((xy)^n)^q = ((yx)^m)^p \cdot ((yx)^n)^q = (yx)^{mp+nq} = yx$ 4p
 (G, \cdot) grup și $xy = yx, (\forall)x, y \in G \Rightarrow (G, \cdot)$ este grup abelian. 2p

Subiectul al VI-lea

Dacă $a > 0$, demonstrați egalitatea:

$$\int_{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \frac{\ln(x^2+x+1)}{(x^2+x+1) \cdot \ln x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3a}}{2+\sqrt{a+1}}$$

Soluție și barem:

Facem substituția $x = \frac{1}{t}$ 1p

$$I = \int_{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \frac{\ln(x^2+x+1)}{(x^2+x+1) \cdot \ln x} dx = \int_{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} \frac{\ln\left(\frac{t^2+t+1}{t^2}\right)}{\frac{(t^2+t+1)}{t^2} \cdot \ln \frac{1}{t}} \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -I -$$

$$-2 \cdot \int_{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \dots\dots\dots 3p$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \bigg|_{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{a+1}+2\sqrt{a+1}}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{a+1}-2\sqrt{a+1}}{\sqrt{3}} \right) = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3a}}{2+\sqrt{a+1}} \dots\dots\dots 1p$$