

Olimpiada Națională de Matematică**Etapă locală- clasa a XI -a****9 februarie 2025****Barem evaluare și de notare****Subiectul I**Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$.

a) Arătați că $\det(A - xI_2) = x^2 - (TrA) \cdot x + \det A, \forall x \in \mathbb{C}$, unde TrA reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A .

b) Dacă $TrA = 2$ și $\det A = 3$, atunci $2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4$.

Soluție și barem :

a) Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.

$$\det(A - xI_2) = (a - x)(d - x) - bc = x^2 - (a + d)x + ad - bc \quad 3p$$

b) Din punctul a) și din ipoteză, obținem $\det(A - xI_2) = x^2 - 2x + 3$

Folosind Hamilton – Cayley avem $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2 \implies A^2 + 3I_2 = 2A$ **1p**

Așadar $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 4 \det A = 12$ **1p**

Cum $A^2 + I_2 = 2A - 3I_2 + I_2 = 2(A - I_2)$

Obținem $\det(A^2 + I_2) = 2^2 \det(A - I_2) = 8$ **1p**

În final avem $2 \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4$ **1p**

Subiectul al II-lea

Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + x_n^2}}{x_n}, \forall n \geq 0$.

a) Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{3}$.

b) Determinați $x_0 > 0$ pentru care șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_n = 2^n(x_n - \sqrt{3})$ este convergent.

(G.M. nr.10/2024)

Soluție și barem :

a) Se consideră funcția $f : (0; \frac{\pi}{2}) \rightarrow (0; \infty)$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Funcția f este bijectivă, deci

pentru $x_0 > 0$ există un unic $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$ astfel încât $x_0 = \operatorname{tg} \alpha$.

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + x_0^2}}{x_0} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right) \quad 1p$$

$$x_2 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4} \right)$$

$$x_3 = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{24} - \frac{\alpha}{8} \right) \text{ și se demonstrează prin inducție matematică egalitatea}$$

$$x_n = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6 \cdot (-2)^{n-1}} + \frac{\alpha}{(-2)^n} \right), \text{ pentru orice } n \geq 0 \quad 1p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) = \sqrt{3} \quad 1p$$

b) $a_n = 2^n \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$, se aplică

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = [\operatorname{tg}(x - y)](1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$ și se ajunge la

$$a_n = 2^n \operatorname{tg} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$$

$$a_n = 2^n \frac{\operatorname{tg} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right)}{\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$$

$$a_n = \frac{\operatorname{tg} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right)}{\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha} \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \alpha \right) \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right)$$

1p

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \left(\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right)}{\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha} = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{6} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \cdot \alpha \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right) = 4 \quad 1p$$

Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent dacă și numai dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \alpha \right)$ și este finită.

$$y_n = \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{3} + (-1)^n \cdot \alpha \right) = (-1)^{n-1} \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right)$$

Pentru $\frac{\pi}{3} - \alpha \neq 0$ șirul $(y_n)_{n \geq 0}$ conține subșirurile $(y_{2n})_{n \geq 0}$ și $(y_{2n+1})_{n \geq 0}$ cu limite diferite,

$$y_{2n} = (-1)^n \left(\frac{\pi}{3} - \alpha \right) \text{ și } y_{2n+1} = \frac{\pi}{3} - \alpha, \text{ deci șirul } (y_n)_{n \geq 0} \text{ nu este convergent.} \quad \mathbf{1p}$$

Pentru $\frac{\pi}{3} - \alpha = 0$ se obține $y_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent pentru $x_0 = tg \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. **1p**

Subiectul al III-lea

Să se calculeze :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^3 - 1)}{\sqrt[2024]{5 - 4x} - 1}$;

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3n+5)^{x^2} - 1}{x^3 + 2x^2}}$.

Soluție și barem :

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^3 - 1)}{\sqrt[2024]{5 - 4x} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sin(x^3 - 1)}{x^3 - 1} \cdot (x-1)(x^2 + x + 1)}{\frac{(1 + (4 - 4x))^{\frac{1}{2024}} - 1}{4 - 4x} \cdot (-4)(x-1)}$ **2p**

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sin(x^3 - 1)}{x^3 - 1} \cdot (x^2 + x + 1)}{\frac{(1 + (4 - 4x))^{\frac{1}{2024}} - 1}{4 - 4x} \cdot (-4)} = \frac{1 \cdot 3}{\frac{1}{2024} \cdot (-4)} = -1518 \quad \mathbf{1p}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3n+5)^{x^2} - 1}{x^2(x+2)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{\ln(3n+5)}{2}$ **1p**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3n+5)^{x^2} - 1}{x^3 + 2x^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\ln(3n+5)}{2}}$$

Pentru șirul cu termenul general $x_n = \frac{\ln(3n+5)}{2}$; $x_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ se aplică Criteriul rădăcinii.

$$\text{Cum } \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\ln(3n+8)}{\ln(3n+5)} = \frac{\ln n + \ln\left(3 + \frac{8}{n}\right)}{\ln n + \ln\left(3 + \frac{8}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(3 + \frac{8}{n}\right)}{1 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(3 + \frac{8}{n}\right)} \text{ și } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1, \quad 2p$$

$$\text{se obține că } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\ln(3n+5)}{2}} = 1. \quad 1p$$

Subiectul al IV-lea

Fie $A, B \in M_3(\mathbb{C})$, astfel încât $B^2 \neq O_3$, $B^4 = O_3$ și $A = B^2 + 2I_3$.

a) Să se arate că $A^p = 2^p \cdot I_3 + p \cdot 2^{p-1} \cdot B^2$, pentru orice $p \in \mathbb{N}^*$.

b) Să se arate că, pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, matricea $A^p - A^{p-1}$ este inversabilă.

Soluție și barem:

a) Deoarece $B^2 \cdot I_3 = I_3 \cdot B^2 = B^2$, se poate aplica binomul lui Newton sau inducția matematică pentru a obține rezultatul de la a). 3p

$$\text{b) } A^p - A^{p-1} = 2^p \cdot I_3 + p \cdot 2^{p-1} \cdot B^2 - 2^{p-1} \cdot I_3 - (p-1) \cdot 2^{p-2} \cdot B^2$$

$$A^p - A^{p-1} = 2^{p-1} \cdot I_3 + 2^{p-2} (p+1) \cdot B^2 \quad 1p$$

$$(2^{p-1} \cdot I_3 + 2^{p-2} (p+1) \cdot B^2)(2^{p-1} \cdot I_3 - 2^{p-2} (p+1) \cdot B^2) = 2^{2p-2} \cdot I_3 \quad 1p$$

$$(2^{p-1} \cdot I_3 - 2^{p-2} (p+1) \cdot B^2)(2^{p-1} \cdot I_3 + 2^{p-2} (p+1) \cdot B^2) = 2^{2p-2} \cdot I_3 \quad 1p$$

Deci matricea $A^p - A^{p-1}$ este inversabilă și inversa ei este matricea 1p

$$C = \frac{1}{2^{2p-2}} (2^{p-1} \cdot I_3 - 2^{p-2} (p+1) \cdot B^2) = \frac{1}{2^{p-1}} \cdot I_3 - \frac{1}{2^p} (p+1) \cdot B^2.$$