

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală- clasa a IX-a****9 februarie 2025****Problema 1**Fie $a, b, c \in (0, +\infty)$. Să se arate că:

a) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + (b+c)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + (a+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) \geq 12;$

b) $\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + 3 \geq 2 \cdot \frac{a+b+c}{a \cdot b \cdot c}.$

Problema 2Să se determine $n \in \mathbb{Z}$, știind că $\left\{ \frac{n^2+4n}{5} \cdot \left\{ \frac{n^2-4n}{5} \right\} \right\} = 0$.Prin notația $\{a\}$ înțelegem partea fracționară a numărului a .**Problema 3**

Pe laturile unui triunghi ABC se construiesc în exterior triunghiurile echilaterale ABQ , BCR și ACS cu centrele C_1 , A_1 , respectiv B_1 . Notăm cu G , G' și G'' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC , $A_1B_1C_1$, respectiv QRS . Să se arate că $2\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{G'G''}$.

Problema 4

Fie triunghiul ABC , I centrul cercului său înscris și D , E , F punctele de contact ale acestuia cu laturile BC , CA , AB . Notăm cu D' , E' și F' intersecțiile semidreptelor (DI) , (EI) , (FI) cu cercul înscris în triunghiul ABC și cu H_1 , H_2 , H_3 ortocentrele triunghiurilor $D'EF$, $E'FD$, respectiv $F'DE$. Arătați că:

- a) $\overrightarrow{D'F} + \overrightarrow{E'D} + \overrightarrow{F'E} = \vec{0}$ dacă și numai dacă triunghiul ABC este echilateral;
b) triunghiurile $H_1H_2H_3$ și DEF au același centru de greutate.

*Supliment Gazeta Matematică, nr. 10/2024***Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.****Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.****Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.****Timp de lucru: 3 ore**