

Olimpiada Națională de Matematică**Etapa locală- clasa a XII-a****9 februarie 2025****Subiectul I**

Să se calculeze: $\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{2} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} + \operatorname{arctg} x \right) dx$

Subiectul al II-lea

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă cu derivata continuă, astfel încât $f(a) = 0$ și $0 \leq f'(x) \leq 1$, $(\forall) x \in [a, b]$. Să se demonstreze că:

$$\int_a^b f^7(t) dt \leq 2 \left(\int_a^b f(t) dt \right)^4$$

(G.M.)**Subiectul al III-lea**

Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că există $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$, astfel încât $(xy)^m = (yx)^m$ și $(xy)^n = (yx)^n$, $(\forall) x, y \in G$. Să se arate că (G, \cdot) este grup abelian.

Subiectul al IV-lea

Dacă $a > 0$, demonstrați egalitatea:

$$\int_{\sqrt{a+1}-\sqrt{a}}^{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} \frac{\ln(x^2 + x + 1)}{(x^2 + x + 1) \cdot \ln x} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3a}}{2 + \sqrt{a+1}}$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.

Timp de lucru: 3 ore