

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
SUCEAVA, 15 februarie 2025

CLASA a VIII-a

1. a) (3p) Fie a, b și c numere reale astfel încât $a^2 + b^2 + c^2 + 68 = 8a + 10b + 12c$. Să se arate că $5a - 2b + c \in [-8, 40]$.

b) (4p) Se consideră numerele reale x și y astfel încât $x \in [-2, 1]$ și $x = 3y - 2$. Determinați valoarea expresiei $E = \sqrt{(x+2)^2} + |x-1| + \sqrt{3(x+2)^2 + 9y^2} + \sqrt{(x-1)^2 + 3(1-x)^2}$.

2. Fie mulțimea $A = \left\{ x \in \mathbb{Q} / x = \frac{a-b\sqrt{2027}}{b-c\sqrt{2027}}, \text{ cu } a, b, c \text{ numere naturale prime} \right\}$.

a) (3p) Calculați cardinalul mulțimii A .

b) (4p) Știind că $m \in A, n \in \mathbb{Q}^*$ și $n + \frac{m}{n} = 2025$, calculați $n + n^2 + \frac{m}{n} + \frac{m^2}{n^2}$ și descompuneți rezultatul în produs de puteri de numere prime.

3. (7p) Se consideră piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu vârful în V și O centrul bazei ABC . Fie M mijlocul muchiei AB și CP bisectoarea unghiului $\sphericalangle VCM$, $P \in VM$. Arătați că $PO = 2 \cdot MO$ dacă și numai dacă $VA = AB\sqrt{3}$.

4. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se construiesc perpendicularele MA și NC , situate de o parte și de alta a planului, astfel încât $MA = 3NC$.

a) (3p) Calculați valoarea raportului dintre aria triunghiului BQC și aria patrulaterului $ABQD$, unde Q este punctul de intersecție al dreptelor MN și AC .

b) (4p) Dacă $CN = AD = \frac{AB}{4}$, arătați că distanța de la punctul A la planul (MBD) este egală cu $\frac{12}{13} \cdot AD$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.