

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

– ETAPA LOCALĂ, 2.02.2025 –

Clasa a XI-a

SUBIECTUL 1

Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / AX = XA\}$.

4p a) Dacă $X \in G$, arătați că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$;

3p b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = A$.

Soluție:

a) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$. $AX = XA \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ 2p

$\begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b & 2b + a \\ d + 2c & c + 2d \end{pmatrix} \Rightarrow c = b, a = d$ reale, așadar $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ 2p

b) $X^2 = A \Rightarrow X^3 = AX = XA$ deci $X \in G$, așadar există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$; 1p

$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$; ecuația devine $\begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = 1 \end{cases}$; Adunând relațiile avem $(a + b)^2 = 3$ deci $a + b = \pm \sqrt{3}$; obținem a și 1p

b soluții ale ecuației $t^2 \pm \sqrt{3}t + \frac{1}{2} = 0$.

Avem $X \in \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2} & -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} \right\}$ 1p

SUBIECTUL 2

2p a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos px}{x^2}$, unde p este un număr real nenul.

5p b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{q} - 1 \right)$, știind că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} px - \sin px}{\operatorname{tg} qx - \sin qx} = \frac{1}{27}$, unde p și q sunt numere

reale pozitive.

Soluție:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos px}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{px}{2}}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{px}{2}}{x} \right)^2 = 2 \cdot \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{2} \quad 2p$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} px - \sin px}{\operatorname{tg} qx - \sin qx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin px (1 - \cos px)}{\cos px}}{\frac{\sin qx (1 - \cos qx)}{\cos qx}} = \quad 1p$$

$$= \left(\frac{p}{q} \right)^3 \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{1}{3} \Rightarrow q = 3p \quad 2p$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{\frac{q}{p}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{3} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3n} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln 3 \quad 2p$$

SUBIECTUL 3

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ și $na_n a_{n+1} = n + a_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și șirul $(b_n)_{n \geq 1}$ definit prin $b_n = a_n^n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4p a) Studiați monotonia, mărginirea și convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$.

3p b) Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

Profesor Petre Năchilă

Soluție:

$$a) a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = \frac{4}{3}, a_5 = 1; \quad 1p$$

$$\text{avem } a_{2n+1} = 1, a_{2n} = \frac{2n}{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*; \quad 1p$$

$$\text{Șirul nu este monoton, este mărginit } a_n \in [1, 2]; \quad 1p$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1, \text{ deci șirul este convergent la } 1. \quad 1p$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2n+1} = 1; \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{2n})^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n-1} \right)^{2n} = e \quad 2p$$

$$\text{Deci șirul este divergent.} \quad 1p$$

SUBIECTUL 4

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2023 & 2024 & 2024 \\ 2024 & 2023 & 2024 \\ 2024 & 2024 & 2023 \end{pmatrix}$. Arătați că numărul $\operatorname{Tr}(A^{2024} - I_3)$ este divizibil cu 2024, unde $\operatorname{Tr}(X)$ reprezintă suma elementelor de pe diagonala principală a matricei pătratică X .

Suplimentul GAZETA MATEMATICĂ

Soluție:

Se observă că $A = \begin{pmatrix} 2024 & 2024 & 2024 \\ 2024 & 2024 & 2024 \\ 2024 & 2024 & 2024 \end{pmatrix} - I_3 = 2024 \cdot B - I_3$, unde 1p

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Atunci $A^{2024} = (2024 \cdot B - I_3)^{2024} = C_{2024}^0 (2024B)^{2024} - C_{2024}^1 (2024B)^{2023} + C_{2024}^2 (2024B)^{2022} - \dots - C_{2024}^{2023} 2024B + C_{2024}^{2024} I_3 =$ 3p

$$= 2024 \cdot (C_{2024}^0 2024^{2023} \cdot B^{2024} - C_{2024}^1 2024^{2022} \cdot B^{2023} + C_{2024}^2 2024^{2021} \cdot B^{2022} - \dots - C_{2024}^{2023} B) + I_3$$
 2p

$$= 2024 \cdot (C_{2024}^0 2024^{2023} \cdot B^{2024} - C_{2024}^1 2024^{2022} \cdot B^{2023} + C_{2024}^2 2024^{2021} \cdot B^{2022} - \dots - C_{2024}^{2023} B) = 2024 \cdot C,$$

unde $C = C_{2024}^0 2024^{2023} \cdot B^{2024} - C_{2024}^1 2024^{2022} \cdot B^{2023} + C_{2024}^2 2024^{2021} \cdot B^{2022} - \dots - C_{2024}^{2023} B$

Se obține $\text{Tr}(A^{2024} - I_3) = \text{Tr}(2024 \cdot C)$, care este evident divizibil cu 2024, deoarece 1p

$$\text{Tr}(2024 \cdot C) = 2024(c_{11} + c_{22} + c_{33})$$

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător. Nu se acordă fracțiuni de punct.