

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a VII - a
Barem de corectare și notare

1. Dacă $x = \sqrt{1+3+5+\dots+89}$ și $y = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1} + \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^{-1} + \dots + \left(\frac{\sqrt{4098600}}{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}\right)^{-1}$,
calculați $x \cdot (1-y)$.

Barem: $x = \sqrt{1+3+5+\dots+89} = \sqrt{2025} = 45$ **2 p**

$y = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2024 \cdot 2025}}$ **2 p**

$y = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2024}} - \frac{1}{\sqrt{2025}} = 1 - \frac{1}{45}$ **2 p**

$x \cdot (1-y) = 1$ **1 p**

2. Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC și punctele D, E, F, G , astfel încât D este mijlocul laturii BC , E aparține laturii AC , F este simetricul lui E față de D , iar $\{G\} = AD \cap BF$. Demonstrați că:

a) segmentele CE și BF sunt congruente;

b) patrulaterul $ABGC$ este un romb.

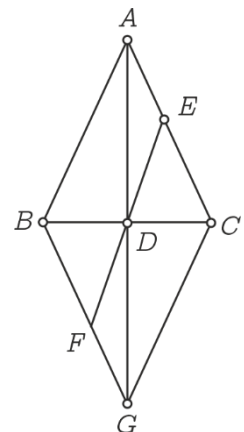
Barem: a) Deoarece $DF = DE$, $DB = DC$ și $\angle BDF = \angle CDE$, rezultă că $\triangle BDF \equiv \triangle CDE$ (L.U.L.), deci $CE = BF$ **2 p**

b) Din $\triangle BDF \equiv \triangle CDE$ rezultă că $\angle ECD = \angle FBD$ (a.i.), prin urmare $AC \parallel BG$ **1 p**

Deoarece $CD = BD$, $\angle ACD = \angle GBD$ și $\angle CDA = \angle BDG$ (opuse la vârf), rezultă că $\triangle ACD \equiv \triangle GBD$ (U.L.U.), deci $AC = BG$ **2 p**

Cum $AC = BG$ și $AC \parallel BG$, rezultă că $ABGC$ este paralelogram. **1 p**

$ABGC$ este paralelogram cu $AB = AC$, deci $ABGC$ este romb. **1 p**



3. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $a = \sqrt{11 - \sqrt{11 - \sqrt{11 + n}}}$ este rațional.

Suplimentul G.M. 9 / 2024

Barem: Condiție de existență: $11 \geq \sqrt{11+n}$, deci $n \leq 110$.

Fie $b = \sqrt{11 - \sqrt{11+n}} < \sqrt{11}$. Avem $a = \sqrt{11-b} \leq \sqrt{11}$ **1 p**

Pentru ca $a \in \mathbb{Q}$, trebuie ca $11-b \in \mathbb{Q}$, deci ca $b \in \mathbb{Q}$. Așadar $11 - \sqrt{11+n} \in \mathbb{Q}$, și rezultă că $\sqrt{11+n} \in \mathbb{Q}$, deci $11+n = k^2$, cu $k \in \mathbb{N}$ **1 p**

Deoarece $k = \sqrt{11+n} > 3$, obținem $b = \sqrt{11-k} < \sqrt{11-3} = \sqrt{8}$ **1 p**

$b = \sqrt{11-k} \in \mathbb{Q}$, deci $11-k = b^2 < 8$ și $b \in \mathbb{N}$. Așadar $b \leq 2$ **1 p**

Deducem că $a = \sqrt{11-b} \geq 3$ și cum $b \in \mathbb{N}$, rezultă $a \in \mathbb{N}$ 1 p

Dar $a < \sqrt{11}$, deci $a = 3$ 1 p

Obținem $b = 2$, $k = 7$ și $n = 38$ 1 p

Observație: După ce se ajunge la $11+n=k^2$, cu $k \in \mathbb{N}$, deoarece $n \leq 110$, rezultă că $11+n \in \{16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121\}$. Pentru tratarea completă a tuturor cazurilor și eliminarea corectă a celor care nu convin, se acordă celelalte **5 puncte**.

4. Se consideră un trapez isoscel $ABCD$ cu baza mare AB și cu $\angle DAB = 30^\circ$. Se construiesc triunghiurile echilaterale CDE și AEF , astfel încât punctele A și E sunt de o parte și de alta a dreptei CD , iar punctul D se află în interiorul triunghiului AEF . Fie O intersecția dreptelor AB și DF . Demonstrați că:

a) triunghiul BCF este echilateral;

b) dreptele EO și CF sunt paralele.

Barem: a) $\angle AED = \angle AEF - \angle DEF = 60^\circ - \angle DEF$ și
 $\angle CEF = \angle CED - \angle DEF = 60^\circ - \angle DEF$, deci
 $\angle AED = \angle CEF$ 1 p

$\triangle AED \equiv \triangle FEC$ (L.U.L.), prin urmare $\angle ECF = \angle ADE$
 și $AD = CF$ 1 p

$ABCD$ trapez, deci $\angle ADC = 180^\circ - \angle DAB = 150^\circ$.

Așadar $\angle ECF = \angle ADE = 360^\circ - \angle ADC - \angle CDE = 150^\circ$,
 deci $\angle DCF = \angle ECF - \angle ECD = 90^\circ$ 1 p

Obținem $\angle BCF = \angle BCD - \angle DCF = 60^\circ$.

$ABCD$ este un trapez isoscel, deci $BC = AD = CF$ și cum $\angle BCF = 60^\circ$, rezultă că triunghiul BCF este echilateral. 1 p

b) $\angle DAB = \angle ABF = 30^\circ$, deci $AD \parallel BF$, așadar $\angle ADO = \angle BFO$ (a.i.). Cum $AD = BC = FB$ rezultă că $\triangle ADO \equiv \triangle BFO$ (U.L.U.), deci O este mijlocul laturii AB 1 p

$\triangle BCE \equiv \triangle ADE$ (L.U.L.), deci $\triangle AEB$ este isoscel cu baza BC . Prin urmare, mediana EO este și înălțime, deci $EO \perp AB$ 1 p

$EO \perp CD$ și $CF \perp CD$, așadar $EO \parallel CF$ 1 p

