

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici”

Etapa Locală

Maramureș – 8 februarie 2025

Clasa a XI- a

Secțiunea H1

Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările

Barem de corectare și notare

1. Spunem că o matrice nenulă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ devine nulă, dacă are proprietatea că $A^2 = O_2$.

a) Verificați dacă matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ devine nulă.

b) Dați exemplu de o matrice B de forma $B = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, cu elemente distincte, ce devine nulă.

c) Dacă X este o matrice ce devine nulă, calculați $\det(X)$.

Soluție

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2 \Rightarrow A$ devine nulă 2 p

b) $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + ab & a \cdot (2 + c) \\ b \cdot (2 + c) & ab + c^2 \end{pmatrix}$ 1 p

$$B^2 = O_2 \Rightarrow \begin{cases} 4 + ab = 0 \\ a \cdot (2 + c) = 0 \\ b \cdot (2 + c) = 0 \\ ab + c^2 = 0 \end{cases}$$
 1 p

Obținem, de ex. $c = -2, a = -4, b = 1$

Pentru orice alt exemplu se acordă punctaj în mod corespunzător. 1 p

c) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $X^2 = O_2$

$$\det(X^2) = \det(O_2) \Leftrightarrow \det(X) \cdot \det(X) = 0 \Leftrightarrow \det(X) = 0$$
 2 p

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $G = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$

a) Dacă $X \in G$, arătați că există $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care $X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

b) Determinați $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X^2 = A$.

Soluție

a) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + c & 2b + d \\ a + 2c & b + 2d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b & a + 2b \\ 2c + d & c + 2d \end{pmatrix}$$
 1 p

$$\begin{cases} 2a + c = 2a + b \\ 2b + d = a + 2b \\ a + 2c = 2c + d \\ b + 2d = c + 2d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = b \\ d = a \end{cases} \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ pentru care } X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \quad 2 \text{ p}$$

$$b) \quad X \cdot A = X \cdot X^2 = X^3 = X^2 \cdot X = A \cdot X \quad 1 \text{ p}$$

$$\Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{R} \text{ pentru care } X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$X^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ 2ab = 1 \end{cases} \quad 1 \text{ p}$$

$$(a + b)^2 = 3 \Rightarrow a + b = \pm\sqrt{3} \Rightarrow b = \pm\sqrt{3} - a$$

$$\text{Cazul I. Pentru } b = \sqrt{3} - a \Rightarrow 2a(\sqrt{3} - a) = 1 \Rightarrow 2a^2 - 2a\sqrt{3} + 1 = 0 \quad 1 \text{ p}$$

$$a_1 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow b_1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$a_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\text{Cazul II. Pentru } b = -\sqrt{3} - a \Rightarrow 2a(-\sqrt{3} - a) = 1 \Rightarrow 2a^2 + 2a\sqrt{3} + 1 = 0 \quad 1 \text{ p}$$

$$a_3 = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2} \Rightarrow b_3 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$a_4 = \frac{-\sqrt{3} - 1}{2} \Rightarrow b_4 = \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}$$

3. Calculați

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x^2 + 8x} - 3}$$

Soluție

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x^2 + 8x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{2x-1} - 1}{\sqrt{x^2 + 8x} - 3} \cdot \frac{\sqrt{2x-1} + 1}{\sqrt{2x-1} + 1} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x} + 3}{\sqrt{x^2 + 8x} + 3} \right) = \quad 3 \text{ p}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2x - 1 - 1}{x^2 + 8x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x} + 3}{\sqrt{2x-1} + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2(x-1)}{(x-1)(x+9)} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 8x} + 3}{\sqrt{2x-1} + 1} \right) \quad 2 \text{ p}$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{\sqrt{9} + 3}{\sqrt{1} + 1} = \frac{3}{5} \quad 1 \text{ p}$$

4. a) Arătați că $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + 2x) = -2$

b) Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b - \sqrt{x^2 + 6x - 4}) = 3$

Soluție

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + 2x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + 2x) \cdot (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} - 2x)}{\sqrt{4x^2 + 8x - 5} - 2x} & \mathbf{1 \text{ p}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 8x - 5 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + 8x - 5} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x - 5}{\sqrt{4x^2 + 8x - 5} - 2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(8 - \frac{5}{x}\right)}{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(8 - \frac{5}{x}\right)}{|x| \sqrt{\left(4 + \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} - 2x} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(8 - \frac{5}{x}\right)}{-x \sqrt{\left(4 + \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} - 2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(8 - \frac{5}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{\left(4 + \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} + 2\right)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8 - \frac{5}{x}}{-\left(\sqrt{\left(4 + \frac{8}{x} - \frac{5}{x^2}\right)} + 2\right)} = -\frac{8}{2 + 2} = -2 & \mathbf{2 \text{ p}}
 \end{aligned}$$

b) Dacă $a \leq 0$, obținem contradicție. Așadar $a > 0$.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b - \sqrt{x^2 + 6x - 4}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax + b - \sqrt{x^2 + 6x - 4})(ax + b + \sqrt{x^2 + 6x - 4})}{ax + b + \sqrt{x^2 + 6x - 4}} & \mathbf{2 \text{ p}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(ax + b)^2 - (x^2 + 6x - 4)}{ax + b + \sqrt{x^2 + 6x - 4}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a^2 - 1)x^2 + (2ab - 6)x + b^2 + 4}{ax + b + \sqrt{x^2 + 6x - 4}} = 3 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$a^2 - 1 = 0 \xRightarrow{a > 0} a = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2b - 6)x + b^2 + 4}{x + b + \sqrt{x^2 + 6x - 4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2b - 6 + \frac{b^2 + 4}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{b}{x} + \sqrt{1 + \frac{6}{x} - \frac{4}{x^2}}\right)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2b - 6}{1 + 1} = 3 \Rightarrow b = 6 \quad \mathbf{2 \text{ p}}$$