

Concursul Național de Matematică Aplicată „Adolf Haimovici ”**Etapă Locală****Maramureș – 8 februarie 2025****Clasa a XII- a****Secțiunea H1****Filiera tehnologică, toate profilurile și specializările**

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție

$$x * y = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}xy + 2\sqrt{2} - 2.$$

- a) Arătați că $x * y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+2)(y+2) - 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că legea de compoziție “*” este asociativă.
c) Determinați numerele naturale m, n și p știind că $m < n < p$ și $m * n * p = 10$.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(x) \mid A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- a) Arătați că mulțimea M este parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, în raport cu operația de înmulțire a matricelor.
b) Determinați mulțimea elementelor simetrizabile din mulțimea M , în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^3-3x-6}, & x < 1 \\ x \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

- a) Arătați că funcția f admite primitive pe \mathbb{R} .
b) Calculați

$$\int_{-1}^2 f(x) dx.$$

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(x) = e^x - x - 1$.

- a) Demonstrați că $f(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
b) Calculați

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x^2) - e^{x^2} + 2x^2 + 2} dx.$$

- c) Demonstrați că

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

Notă:*Toate subiectele sunt obligatorii.**Fiecare problemă se notează de la 0 la 7 puncte.**Timp de lucru – 3 ore*