

Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 8 februarie 2025
Clasa a V - a

Barem de corectare și notare

Problema 1. Fie suma $S = 101 + 1001 + 10001 + \dots + \overline{100 \dots 001}$, (ultimul termen are 2025 cifre).

- Aflați câte cifre are termenul din mijloc al sumei S ;
- Aflați câte cifre de 0 se folosesc pentru a scrie toți termenii sumei;
- Calculați suma S .

Soluție:

- Suma are 2023 termeni, deci termenul din mijloc este al 1012-lea termen și are 1014 cifre.....3p
- Numărul cifrelor de 0 necesare pentru a scrie toți termenii sumei S este:
 $n = 1 + 2 + 3 + \dots + 2023 = 2023 \cdot 1012 = 2047276$2p
- $S = 100 + 1000 + 10000 + \dots + \underbrace{100 \dots 00}_{2024 \text{ cifre de } 0} + 2023 = \underbrace{111 \dots 13123}_{2021 \text{ cifre de } 1}$2p

Problema 2. Fie numerele:

$$a = [(12 - 0^{12}) \cdot (3^3 - 3^2) + 1^{2025}] : (3^4 - 2^5 - 2 \cdot 3^2) \cdot 11$$

$$b = 27^{33} : [9^{32} \cdot 3^{34} + (3^5 \cdot 3^{20})^5 : (81 \cdot 3^{23}) \cdot 2 + (5^8 : 5^8 - 5^0)^{35} \cdot 2]$$

Calculați $a^b + b^a$.

Soluție:

$$a = 77, \dots\dots\dots 3p$$
$$b = 1 \dots\dots\dots 3p$$
$$a^b + b^a = 78 \dots\dots\dots 1p$$

Problema 3. Se consideră numerele naturale a și b , cu $a > b > 0$. Împărțind numărul a la numărul $a - b$ se obține câtul 2 și restul 3.

- Dacă $a = 2025$, determinați câte valori posibile are diferența $a - b$;
- Determinați câtul și restul împărțirii numărului b la numărul $a - b$.

Soluție:

- $a = 2(a - b) + 3$, $3 < a - b$2p
Avem $3 < a - b < a = 2025$, de unde $a - b \in \{4, 5, \dots, 2024\}$
Obținem că $a - b = (2025 - 3) : 2 = 1011$ poate lua 1 valori.....2p
- Din $a = 2(a - b) + 3$, cu $3 < a - b$, obținem $a = 2a - 2b + 3$,
adică $b = a - b + 3$, cu $3 < a - b$
Prin urmare, câtul este 1 și restul este 3.....3p

Problema 4. Stabiliți dacă există numerele naturale x, y, z astfel încât produsul $P = (x + y)(x + z)(y + z)$ să fie egal cu 2025^{2024} . Dar cu 2024^{2025} ?

Soluție:

Dacă $P = 2025^{2024} \Rightarrow P$ este impar, adică toți factorii sunt numere impare

Deducem că suma $(x + y) + (x + z) + (y + z)$ este impară, adică $2(x + y + z)$ este impar ceea ce este fals. În concluzie $P \neq 2025^{2024}$ **3p**

Dacă $P = 2024^{2025}$, atunci există numerele naturale x, y, z pentru care

$$(x + y)(x + z)(y + z) = 2024^{2025}$$

Un exemplu poate fi $x = y = 1012$ și $z = 2024^{1012} - 1012$ pentru care au loc egalitățile

$$x + y = 2024$$

$$x + z = 2024^{1012}$$

$$y + z = 2024^{1012}$$

.....**4p**

Orice altă alegere a numerelor naturale x, y, z , corect formulată și verificată este punctată corespunzător cu maxim 4 puncte.