



## Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapă locală - Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a X-a

Barem de notare și evaluare

### Problema 1.

Fie  $n \geq 3$  și  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  cu  $[a_1] = [a_2] = \dots = [a_n] = 4$ . Arătați că:

$$\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq 2n.$$

**Soluție:**

$$[a_i] = 4 \Rightarrow 4 \leq a_i < 5 \Rightarrow \dots \dots \dots 1p$$

$$(a_i - 4)(a_i - 5) \leq 0 \Rightarrow \dots \dots \dots 1p$$

$$a_i^2 \leq 9a_i - 20 \dots \dots \dots 2p$$

$$\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq \log_{a_1}(a_2) + \log_{a_2}(a_3) + \dots + \log_{a_n}(a_1) \geq$$

$$2n \sqrt[n]{\log_{a_1}(a_2) \cdot \log_{a_2}(a_3) \cdot \dots \cdot \log_{a_n}(a_1)} = 2n \dots \dots \dots 3p$$

### Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:  $\sqrt{5 + 4x - x^2} + 3\sqrt{-3 + 12x - 3x^2} = 30$ .

**Soluție:**

$$\sqrt{9 - (x - 2)^2} + 3\sqrt{9 - 3(x - 2)^2} = 30 \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Notăm } y = (x - 2)^2 \Rightarrow 0 \leq y \leq 3 \dots \dots \dots 1p$$

$$\text{Funcția } f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(y) = \sqrt{9 - y} + 3\sqrt{9 - 3y} \text{ este strict descrescătoare} \dots \dots \dots 2p$$

$$f(y) = 30 \text{ are soluția unică } y = 0 \dots \dots \dots 2p$$

$$x = 2 \text{ soluție unică} \dots \dots \dots 1p$$

### Problema 3.

Fie  $ABCD$  un patrulater inscriptibil. Notăm cu  $H_1, H_2$  și  $H_3$  ortocentrele triunghiurilor  $ACD, BCD$  respectiv  $ACB$ . Demonstrați că  $AH_1H_2H_3$  este paralelogram dacă și numai dacă  $AC$  este diametru.

**Soluție:**

Considerăm un reper cu centrul în  $O$ . Din teorema lui Sylvester obținem:

$$z_{H_1} = z_A + z_C + z_D \dots \dots \dots 1p$$

$$z_{H_2} = z_B + z_C + z_D \dots \dots \dots 1p$$

$$z_{H_3} = z_A + z_C + z_B \dots \dots \dots 1p$$

$$AH_1H_2H_3 \text{ paralelogram} \Leftrightarrow z_A + z_{H_2} = z_{H_1} + z_{H_3} \dots \dots \dots 2p$$

$$\Leftrightarrow z_A + z_B + z_C + z_D = 2z_A + z_B + 2z_C + z_D \Leftrightarrow z_A + z_C = 0 \Leftrightarrow AC \text{ diametru} \dots \dots \dots 2p$$



### Problema 4.

Fie  $n$  un număr natural nenul și  $z \in \mathbb{C}$  astfel încât  $|z| = 1$ . Demonstrați că pentru orice număr complex  $a$  are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq n|z - 1|.$$

### Soluție:

$$|z + a| + |z^2 + a| = |-z - a| + |z^2 + a| \geq |-z - a + z^2 + a| = |z - 1| \dots\dots\dots 3p$$

$$|z^3 + a| + |z^4 + a| = |-z^3 - a| + |z^4 + a| \geq |-z^3 - a + z^4 + a| = |z - 1|$$

$$|z^{2n-1} + a| + |z^{2n} + a| = |-z^{2n-1} - a| + |z^{2n} + a| \geq |-z^{2n-1} - a + z^{2n} + a| = |z - 1| \dots\dots 3p$$

Adunăm și obținem inegalitatea dorită.....1p