



## Olimpiada Națională de Matematică 2025

Etapa locală – Iași, 31 ianuarie 2025

Clasa a VI-a

Barem de notare și evaluare

### Problema 1

Arătați că fracția  $\frac{\overline{ab4} + \overline{aba} + \overline{a1b}}{1+2+2^2+\dots+2^{62}}$  se simplifică cu 7.

#### Soluție

$$\overline{ab4} + \overline{aba} + \overline{a1b} = 301 \cdot a + 21 \cdot b + 14 = 7 \cdot (43a + 3b + 2) \dots\dots\dots 3p$$

Suma  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{62}$  are 63 de termeni pe care îi vom grupa câte 3 și atunci

$$S = (1 + 2 + 2^2) + (2^3 + 2^4 + 2^5) + \dots + (2^{60} + 2^{61} + 2^{62}) = 7 + 2^3 \cdot 7 + \dots + 2^{60} \cdot 7 = 7 \cdot (1 + 2^3 + \dots + 2^{60}) \dots\dots\dots 3p$$

Fracția se simplifică cu 7 .....1p

### Problema 2

a) Câte numere naturale de forma  $\overline{abc}$ , scrise în baza zece, îndeplinesc condiția  $a \cdot b \cdot c = 30$ ? Justificați răspunsul.

b) Care dintre numerele de mai sus sunt prime? Justificați răspunsul.

#### Soluție

a) Îl putem scrie pe 30 ca produs de trei cifre astfel:  $30 = 1 \cdot 5 \cdot 6$  sau  $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ .....1p

Prima scriere generează șase numere: 156, 165, 516, 561, 615, 651 .....1p

A doua scriere generează tot șase numere: 235, 253, 325, 352, 523, 532 deci sunt 12 numere .....1p

b) Cum  $1 + 5 + 6 = 12 : 3$  avem toate numerele generate de prima scriere multipli de 3, deci nu sunt prime. ....1p

Dintre numerele generate de a doua scriere, 352 și 532 sunt pare, iar 235 și 325 sunt divizibile cu 5, deci nu sunt numere prime. ....1p

Numărul 253 =  $11 \cdot 23$  deci nu este prim. ....1p

Numărul 523 nu este divizibil cu niciun număr prim mai mic sau egal decât 23, deci este prim. ....1p

### Problema 3

Semidreptele  $[OC$  și  $[OD$  sunt situate în interiorul unghiului  $\widehat{AOB}$  astfel încât  $\widehat{AOC} = 90^\circ$  și  $\widehat{DOC} = 20^\circ$ . Dacă  $[OM$  și  $[ON$  sunt bisectoarele unghiurilor  $\widehat{AOD}$ , respectiv  $\widehat{COB}$ , iar  $\widehat{MON} = 70^\circ$ , calculați  $\widehat{AOB}$ .

## Soluție

Analizăm două cazuri în funcție de poziția punctului  $D$  față de  $\widehat{COB}$ :

### Cazul 1:

Dacă  $D \in \text{Int}\widehat{COB}$  atunci  $\widehat{AOD} = \widehat{AOC} + \widehat{DOC} = 90^\circ + 20^\circ = 110^\circ$ . Cum  $[OM]$  este bisectoarea  $\widehat{AOD}$  atunci  $\widehat{AOM} = \widehat{MOD} = 110^\circ : 2 = 55^\circ$  .....2p  
 $\widehat{MOC} = \widehat{MOD} - \widehat{COD} = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$  și  $\widehat{MON} = 70^\circ$  rezultă  $\widehat{NOC} = \widehat{MON} - \widehat{COM} = 70^\circ - 35^\circ = 35^\circ$  iar  $\widehat{COB} = 2 \cdot \widehat{CON} = 70^\circ$  de unde  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 90^\circ + 70^\circ = 160^\circ$  .....2p

### Cazul 2:

Dacă  $D \notin \text{Int}\widehat{COB}$  atunci  $D \in \text{Int}\widehat{AOC}$  și  $\widehat{AOD} = \widehat{AOC} - \widehat{DOC} = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$  și cum  $[OM]$  este bisectoarea  $\widehat{AOD}$  obținem că  $\widehat{AOM} = \widehat{MOD} = 35^\circ$  .....1p  
 Din  $\widehat{MON} = 70^\circ$  obținem că  $\widehat{MOD} + \widehat{DOC} + \widehat{CON} = 70^\circ$  de unde  $\widehat{CON} = 15^\circ$ . Atunci  $\widehat{COB} = 2 \cdot \widehat{CON} = 30^\circ$  și  $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$  .....2p

## Problema 4

Un antreprenor împarte o sumă de bani  $S$  angajaților săi  $A_1, A_2, \dots, A_n$  în părți invers proporționale cu numerele  $2, 6, 12, \dots, n \cdot (n+1)$ , unde  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ . Angajatul  $A_3$  constată că el primește de  $\frac{225}{8}$  ori mai mult decât ar fi primit dacă aceeași sumă  $S$  ar fi distribuită angajaților  $A_1, A_2, \dots, A_n$  în părți direct proporționale cu numerele  $2, 4, 6, \dots, 2 \cdot n$ .

a) Folosind eventual relația  $\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , arătați că:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$ .

b) Determinați-l pe  $n$  – numărul de angajați.

## Soluție

a)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$  .....2p

b) Notăm cu  $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$  sumele pe care le primesc angajații  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Evident  $s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n = S$ . Numerele  $s_1, s_2, s_3 \dots s_n$  sunt invers proporționale cu numerele  $2, 6, 12, \dots, n \cdot (n+1)$  de aceea  $\frac{s_1}{\frac{1}{1 \cdot 2}} = \frac{s_2}{\frac{1}{2 \cdot 3}} = \dots = \frac{s_n}{\frac{1}{n \cdot (n+1)}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n}{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}} = \frac{S}{\frac{n}{n+1}}$

De aici deducem că  $s_3 = \frac{n+1}{12n} \cdot S$  .....2p

Notăm cu  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  sumele pe care le primesc angajații  $A_1, A_2, \dots, A_n$  în al doilea caz. Evident  $t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = S$ . Numerele  $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$  sunt direct proporționale cu numerele  $2, 4, 6, \dots, 2 \cdot n$  de aceea:  $\frac{t_1}{2} = \frac{t_2}{4} = \frac{t_3}{6} = \dots = \frac{t_n}{2 \cdot n} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n}{2 + 4 + 6 + \dots + 2 \cdot n} = \frac{S}{n \cdot (n+1)}$  iar de aici obținem că  $t_3 = \frac{6 \cdot S}{n \cdot (n+1)}$  .....2p

Din datele problemei avem că  $s_3 = \frac{225}{8} \cdot t_3$  iar de aici  $\frac{n+1}{12n} \cdot S = \frac{225}{8} \cdot \frac{6}{n \cdot (n+1)} \cdot S$  rezultă  $(n+1)^2 = 2025$  și  $n = 44$  .....1p

Așadar, antreprenorul are 44 de angajați.