



Olimpiada Națională de Matematică 2025
Etapa locală - Iași, 31 ianuarie 2025
Clasa a X-a

Problema 1.

Fie $n \geq 3$ și $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ cu $[a_1] = [a_2] = \dots = [a_n] = 4$. Arătați că:

$$\log_{a_1}(9a_2 - 20) + \log_{a_2}(9a_3 - 20) + \dots + \log_{a_n}(9a_1 - 20) \geq 2n.$$

Problema 2.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{5 + 4x - x^2} + 3^{\sqrt{-3 + 12x - 3x^2}} = 30$.

Problema 3.

Fie $ABCD$ un patrulater inscriptibil. Notăm cu H_1, H_2 și H_3 ortocentrele triunghiurilor ACD , BCD , respectiv ACB . Demonstrați că $AH_1H_2H_3$ este paralelogram dacă și numai dacă AC este diametru.

Problema 4.

Fie n un număr natural nenul și $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $|z| = 1$. Demonstrați că pentru orice număr complex a are loc inegalitatea:

$$\sum_{k=1}^{2n} |z^k + a| \geq n|z - 1|.$$

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.