

Olimpiada Națională de Matematică 2025**Etapă locală - Iași, 31 ianuarie 2025****Clasa a XI-a****Problema 1.**

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $a_1 = 1$ și $a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

a) Arătați că $0 \leq a_n - \sqrt{n} \leq 1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}}$.

Problema 2.

Fie X o matrice de ordinul doi, cu elemente numere reale, care satisface ecuația $X^2 + X = 2I_2$.

a) Demonstrați că, dacă toate elementele matricei X sunt numere naturale, atunci $X = I_2$.

b) Demonstrați că există o infinitate de matrice X , care au toate elementele numere întregi și care satisfac ecuația considerată.

Problema 3.

Se consideră șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin relațiile $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, oricare ar fi $n \geq 1$.

a) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

c) Demonstrați că $x_n^2 = 1 + 3 \cdot 2^{2n-2} x_1^2 x_2^2 \cdots x_{n-1}^2$, oricare ar fi $n \geq 2$.

d) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}$.

Problema 4.

Fie A o matrice de ordin trei cu elemente numere întregi.

a) Dacă matricea A este inversabilă și A^{-1} are toate elementele numere întregi, arătați că $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

b) Demonstrați că, dacă A are toate elementele numere impare, atunci $\det(2A)$ se divide cu 32.

c) Demonstrați că $\det(4A + 3A')$ se divide cu 7.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.