



A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică
Etapa zonală, 15 februarie 2025
Clasa a X-a

Problema 1. Arătați că funcția $f: [4, +\infty) \rightarrow [2, +\infty)$, $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - 16}}$ este bijectivă și determinați funcția inversă a lui f .

Problema 2. Demonstrați că, pentru orice $z \in \mathbb{C}$ cu $|z| = 1$ și orice $n \in \mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea următoare:

$$n \cdot |1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3| + \dots + |1 + z^{2n+1}| \geq 2n$$

Problema 3. Arătați că $(\log_{45} S + 1) \cdot (\log_{44} S - 1) = -1$, unde:

$$S = \sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{k\sqrt{k+1} + (k+1)\sqrt{k}}$$

Problema 4. Demonstrați că are loc următoarea inegalitate:

$$4 < \log_3 5 + \log_5 11 + \log_{11} 27 < \frac{9}{2}$$

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.