

A 75-a Olimpiadă Națională de Matematică

Etapa zonală, 15 februarie 2025

Clasa a XII-a

Problema 1. Se consideră mulțimea $M = (-\infty, 1)$. Pentru fiecare pereche $(x, y) \in M \times M$ notăm

$$x * y = \frac{2024 - xy}{2025 - x - y}.$$

- a) Arătați că funcția $(x, y) \rightarrow x * y$ definește o lege de compoziție pe M .
- b) Demonstrați că legea de compoziție ” $*$ ” este comutativă, asociativă, dar nu are element neutru.

Problema 2. Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

a)

$$\int \frac{2x^2 + 3e^x - 1}{x^2 + e^x - x} dx, \quad x \in \mathbb{R};$$

b)

$$\int \frac{\sin x}{27 \sin x + 36 \cos x} dx, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Problema 3. Fie (G, \cdot) un grup finit și $g \in G$ astfel încât $\text{ord}(g) = 6$. Să se arate că există și sunt unice $a, b \in G$ astfel încât $\text{ord}(a) = 2$, $\text{ord}(b) = 3$ și $a \cdot b = b \cdot a = g$. (Cu $\text{ord}(x)$ am notat ordinul elementului x .)

Problema 4. Fie $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Să se determine funcția f , știind că satisface următoarele condiții:

- (1) $2x^3 F(x) + x^2 f(x) = e^{x^2} \cdot (4x^2 - 1), \forall x \in (0, +\infty);$
- (2) $f(1) = e - \frac{2}{e}.$

Toate problemele sunt obligatorii, justificați răspunsurile date!

Timp de lucru 3 ore.

Toate problemele sunt notate de la 0 la 7 puncte.