

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 8.02.2025

Clasa a VIII-a

Barem de corectare și notare

SUBIECTUL 1

a) Numerele reale pozitive a și b satisfac relația $2a + 3b + 15 = 6\sqrt{2a+1} + 4\sqrt{3b+1}$.

Calculați $(a - b - 4)^{2025}$.

b) Fie $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{2024}$ numere reale astfel încât

$$\sqrt{x_1^2 - 2x_1 + 1^2} + \sqrt{x_2^2 - 4x_2 + 2^2} + \sqrt{x_3^2 - 6x_3 + 3^2} + \dots + \sqrt{x_{2024}^2 - 4048x_{2024} + 2024^2} \leq 0.$$

Calculați $(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2024}) \cdot 2025^{-1}$.

Soluție

a) $2a + 3b + 15 = 6\sqrt{2a+1} + 4\sqrt{3b+1} \Leftrightarrow (\sqrt{2a+1} - 3)^2 + (\sqrt{3b+1} - 2)^2 = 0 \dots 2p$

$a = 4, b = 1, (a - b - 4)^{2025} = -1 \dots 1p$

b) $\sqrt{(x_1 - 1)^2} + \sqrt{(x_2 - 2)^2} + \sqrt{(x_3 - 3)^2} + \dots + \sqrt{(x_{2024} - 2024)^2} \leq 0 \dots 1p$

$|x_1 - 1| + |x_2 - 2| + |x_3 - 3| + \dots + |x_{2024} - 2024| = 0 \dots 1p$

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_{2024} = 2024 \dots 1p$

$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2024}) \cdot 2025^{-1} = \frac{2024 \cdot 2025}{2} \cdot \frac{1}{2025} = 1012 \dots 1p$

SUBIECTUL 2

a) Arătați că pentru orice numere reale $a, b, c, d \in (0; \infty)$ are loc inegalitatea

$$(a + b + c + d) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

b) Rezolvați în R ecuația:

$$\frac{x^2 - 1}{2024} + \frac{x^2 - 2}{2023} + \frac{x^2 - 3}{2022} + \dots + \frac{x^2 - 2024}{1} = \frac{2024x^2}{2025}.$$

Soluție

a) Înmulțind termen cu termen și grupând convenabil :

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) = 4 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{a}{d} + \frac{d}{a} \right) +$$

$$\left(\frac{b}{d} + \frac{d}{b} \right) + \left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c} \right) \dots 1p$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq 2 \text{ etc.} \Rightarrow (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 4 + 2 \cdot 6 = 16 \dots 2p$$

b) Scădem 2024 din ambii termeni ai ecuației, obținem

$$\left(\frac{x^2 - 1}{2024} - 1 \right) + \left(\frac{x^2 - 2}{2023} - 1 \right) + \left(\frac{x^2 - 3}{2022} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{x^2 - 2024}{1} - 1 \right) = \frac{2024x^2}{2025} - 2024 \dots 1p$$

$$(x^2 - 2025) \left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2023} + \dots + \frac{1}{1} - \frac{2024}{2025} \right) = 0, \frac{1}{2024} + \frac{1}{2023} + \dots + \frac{1}{1} > 1, \frac{2024}{2025} < 1 \dots 2p$$

$$\left(\frac{1}{2024} + \frac{1}{2023} + \dots + \frac{1}{1} - \frac{2024}{2025} \right) > 0, x^2 = 2025, x \in \{-45, 45\} \dots 1p$$

SUBIECTUL 3

Fie ABCD un tetraedru cu baza BCD triunghi echilateral, iar G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD, respectiv ACD.

a) Arătați că $G_1G_2 \parallel (BCD)$.

b) Considerăm o dreaptă PQ, $P \in (CD)$ și $Q \in (BC)$ ce conține centrul bazei. Arătați că $AC \parallel (G_1PQ)$

Supliment G.M.

Soluție

a) AM mediană în $\triangle ABD$ și G_1 centru de greutate $\triangle ABD \Rightarrow \frac{G_1M}{AM} = \frac{1}{3}$ 1p

AN mediană în $\triangle ACD$ și G_2 centru de greutate $\triangle ACD \Rightarrow \frac{G_2N}{AN} = \frac{1}{3}$ 1p

În $\triangle AMN$ avem $\frac{G_1M}{AM} = \frac{G_2N}{AN} \xrightarrow{R.T.Thales} G_1G_2 \parallel MN$ 1p

$G_1G_2 \parallel MN, MN \subset (BCD), G_1G_2 \not\subset (BCD) \Rightarrow G_1G_2 \parallel (BCD)$ 1p

b) O centru $\triangle BCD$ echilateral $\Rightarrow O$ centru de greutate $\triangle BCD$, CM mediană $\Rightarrow \frac{OM}{CM} = \frac{1}{3}$ 1p

În $\triangle AMC$ avem $\frac{G_1M}{AM} = \frac{OM}{CM} \xrightarrow{R.T.Thales} G_1O \parallel AC$ 1p

$AC \parallel G_1O, G_1O \subset (G_1PQ), AC \not\subset (G_1PQ) \Rightarrow AC \parallel (G_1PQ)$ 1p

SUBIECTUL 4

Fie ABCD un pătrat cu latura $AB = 2a, a > 0$. Pe planul pătratului se ridică, de aceeași parte a planului, perpendicularele $BE = a$ și $DF = a(2\sqrt{2} - 1)$.

a) Fie $M \in (DB)$ astfel încât $MB = a$ și $N \in (BC)$ astfel încât $MN \parallel AC$.

Demonstrați că $ME \perp (FMN)$.

b) Determinați lungimea segmentului BT, $T \in (ABC)$, știind că $TF + TE$ are valoare minimă.

Soluție

a) Cum $BD = 2a\sqrt{2}$, obținem $DM = (2\sqrt{2} - 1)a = FD$, atunci triunghiurile MEB, DFM sunt dreptunghice isoscele, deci $m(\widehat{FME}) = 90^\circ, EM \perp FM$ (1)2p

Cum $MN \parallel AC, AC \perp BD \Rightarrow MN \perp BD$, dar $EB \perp (ABCD) \Rightarrow EB \perp MN$, deci $MN \perp (BEM)$ și $MN \perp EM$ (2). Din (1) și (2) obținem concluzia $ME \perp (FMN)$ 2p

b) Fie L simetricul lui F față de D, avem $FL \parallel EB$, L și E sunt deoparte și de alta față de BD, avem că $EL \cap BD = \{T\}$. Arătăm că acesta e punctul căutat. Dacă notăm cu S un alt punct din planul (ABCD), din congruența triunghiurilor se obține că $FS=LS$ și $TF=LT$, avem succesiv $TF+TE=TL+TE=LE$, dar $FS+SE=LS+SE>LE$ (inegalitatea triunghiului SLE).....2p

Cum $FL \parallel EB$ avem că triunghiurile DLT și BET sunt asemenea, deci $\frac{BE}{DL} = \frac{BT}{DT} \Rightarrow \frac{a}{(2\sqrt{2}-1)a} =$

$\frac{BT}{2a\sqrt{2}-BT} \Rightarrow BT = a$ 1p

Orice rezolvare diferită de cea din barem se va nota corespunzător.