

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ 7.02.2025

CLASA a XII-a

Problema I. (7 puncte)

Se consideră mulțimea $G = (-1, 1)$ și legea de compoziție „ $*$ ” pe G definită prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.

a) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Calculați $\underbrace{x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori } x}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

prof. Anca Cristina Hodorogea, Inspectoratul Școlar Județean Cluj

Problema II. (7 puncte)

Fie (G, \cdot) un grup și $a \in G$ astfel încât $x^4 = a^{-1}xa$, pentru orice $x \in G$. Demonstrați că $x^9 = e$, pentru orice $x \in G$ (unde $e \in G$ este elementul neutru).

(G.M. nr. 5/2023)

Problema III. (7 puncte)

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \frac{x^n}{x^n + x + 2024} dx$.

prof. Jecan Eugen și Găldean Alina, Colegiul Național „Andrei Mureșanu”, Dej

Problema IV. (7 puncte)

Să se determine funcțiile derivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care au proprietatea că $f(x) = x^2 + \int_0^x e^{-t} \cdot f(x-t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$.

prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Emil Racoviță” Cluj-Napoca

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru - 3 ore.

SUCCES!