

12

Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală, 8 februarie 2025
Clasa a XII-a

AG
2025

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul I – soluție orientativă

$$\begin{aligned} a) I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x \cdot \operatorname{tg} x)^{n-1} \cdot e^x (1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x) dx = & 2p \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (e^x \cdot \operatorname{tg} x)^{n-1} \cdot (e^x \cdot \operatorname{tg} x)' dx = \frac{(e^x \cdot \operatorname{tg} x)^n}{n} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{e^{\frac{n\pi}{4}}}{n} & 2p \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{n \cdot I_n} - 1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{\frac{\pi}{4n}} - 1) = & 2p \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\pi}{4n}} - 1}{\frac{\pi}{4n}} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} & 1p \end{aligned}$$

Subiectul II – soluție orientativă

Dacă H este o parte stabilă finită a lui Z , atunci există $a = \min H$ și $b = \max H$. 2p
Presupunând că $b > 2026$, rezultă $b - 2025 > 1$ de unde prin înmulțire cu $b - 2025$ avem 2p
 $(b - 2025)^2 > b - 2025 \Leftrightarrow (b - 2025)^2 + 2025 > b \Leftrightarrow b \circ b > b$, contradicție cu $b = \max H$,
deci $b \leq 2026$
Presupunând că $a < 2024$ avem $a - 2025 < -1 \Rightarrow (a - 2025)^2 > 1 \Leftrightarrow$ 1p
 $(a - 2025)^2 + 2025 > 2026 \Rightarrow a \circ a > b$, contradicție cu $b = \max H$, deci $a \geq 2024$
Rezultă că H poate conține numai elementele 2024, 2025, 2026 și poate fi una din mulțimile 1p
 $\{2024\}, \{2025\}, \{2026\}, \{2025, 2026\}, \{2024, 2025\}, \{2024, 2026\}, \{2024, 2025, 2026\}$
Corespund $\{2025\}, \{2026\}, \{2025, 2026\}, \{2024, 2025\}, \{2024, 2026\}, \{2024, 2025, 2026\}$ 1p

Subiectul III – soluție orientativă

$f(x \circ y) = f(x) \circ f(y) \Rightarrow (x \circ y)^2 = x^2 \circ y^2 \Rightarrow x \circ y \circ x \circ y = x \circ x \circ y \circ y$ 2p
Cum G grup, există x^{-1} respectiv $y^{-1} \Rightarrow x \circ y = y \circ x$ 1p
Se știe că dacă $|G_1| = m \Rightarrow x^m = e_1$, și din $f(xy) = f(x)f(y) \Rightarrow f(x^m) = f^m(x)$ 2p
Notăm cu e_i elementul neutru al grupului G_i . Fie $x \in G_1 \Rightarrow (f(x))^n = e_2 \Rightarrow e_2 = f(e_1) =$
 $f(x^m) = f^m(x)$
Deoarece $(m, n) = 1 \Rightarrow (\exists) u, v \in \mathbb{Z}$ astfel încât $nu + mv = 1 \Rightarrow$ 1p
 $f(x) = f(x)^{nu+mv} = f(x)^{nu} \cdot f(x)^{mv} = e_2 \cdot e_2 = e_2 \Rightarrow f(x) = e_2$ este unic morfism de 1p
la G_1 la G_2 .

Subiectul IV – soluție orientativă

Cu substituția $y = 4 - x \Rightarrow \int_0^4 f(4 - y)^2 dy = \int_0^4 f(y) \cdot f(4 - y) dy$. (1). 1p
Utilizând notația cu variabilă x și adunând relația (1) cu cea din enunț \Rightarrow 2p
 $\int_0^4 (f(x) - f(4 - x))^2 dx = 0$, f continuă $\Rightarrow f(x) = f(4 - x) \ (\forall) x \in [0, 4]$
b) Notăm $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + (4 - x)^n} \Rightarrow I_n = I_1 + I_2$ unde $I_1 = \int_0^2 f_n(x) dx, I_2 = \int_2^4 f_n(x) dx$ 2p
Cu substituția $y = 4 - x$ în I_2 obținem că $I_2 = I_1 \Rightarrow I_n = 2I_1$
Cum $x \in [0, 4]$ se arată imediat că $(4 - x)^n \leq x^n + (4 - x)^n \leq 2(4 - x)^n \Rightarrow$ 1p
 $4 - x \leq f_n(x) \leq \sqrt[n]{2}(4 - x) \xRightarrow{\int_0^2} 6 \leq \int_0^2 f_n(x) dx \leq 6 \cdot \sqrt[n]{2} \xrightarrow{! \cdot 2} 12 \leq I_n \leq 12 \cdot \sqrt[n]{2}$ 1p
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 12$.

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător

Varianța 2