

**12****Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etaa locală, 8 februarie 2025****Clasa a XII-a****AG**  
2025**Subiectul I**

Fie șirul  $(I_n)_{n \geq 1}$  cu termenul general  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{nx} (tg^{n-1}x + tg^n x + tg^{n+1}x) dx, n \in \mathbb{N}$

a) Să se calculeze  $I_n$

**4 p**

b) Să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n^2]{n \cdot I_n} - 1)$

**3 p****Subiectul II**

Determinați părțile stabile finite ale mulțimii numerelor întregi față de operația „o” definită prin  $xoy = xy - 2025x - 2025y + 2025 \cdot 2026$ .

**7 p****Subiectul III**

a) Fie  $(G, \cdot)$  un grup și  $f: G \rightarrow G, f(x) = x^2$  automorfism; arătați că  $(G, \cdot)$  este grup abelian.

**3 p**

b) Fie  $(G_1, \circ), (G_2, *)$  grupuri finite având  $m$  elemente, respectiv  $n$  elemente, cu  $(m, n) = 1$ . Arătați că există un unic morfism de grup  $f: G_1 \rightarrow G_2$ , pe care să îl precizați.

**4 p****Subiectul IV**

Fie  $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă.

a) Dacă  $\int_0^4 f(x)^2 dx = \int_0^4 f(x) \cdot f(4-x) dx$  arătați că  $f(x) = f(4-x) (\forall) x \in [0, 4]$

**3 p**

b) Se consideră  $I_n = \int_0^4 \sqrt[n]{x^n + (4-x)^n} dx, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ . Calculați  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$

**4 p****Varianta 2****Notă:**

**Timp de lucru: 3 ore**  
**Fiecare subiect se redactează pe foaie separată**  
**și este notat cu punctaj întreg, de la 0 la 7 p.**