

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 9 Martie 2013

CLASA a V-a

- Problema 1.** a) Calculați $5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3$;
b) Arătați că numărul 2015^{2014} poate fi scris ca o sumă de patru cuburi perfecte.

Gazeta Matematică

Soluție: a) $5^3 = 125$; $6^3 = 216$; $7^3 = 343$; $11^3 = 1331$ și apoi suma
 $125 + 216 + 343 + 1331 = 2015$ **2 p**
b) $2015^{2014} = 2015^{2013} \cdot 2015 = 2015^{2013}(5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3)$ **2 p**
 $2015^{2013}(5^3 + 6^3 + 7^3 + 11^3) = 2015^{2013} \cdot 5^3 + 2015^{2013} \cdot 6^3 + 2015^{2013} \cdot 7^3 +$
 $2015^{2013} \cdot 11^3 = (2015^{671} \cdot 5)^3 + (2015^{671} \cdot 6)^3 + (2015^{671} \cdot 7)^3 + (2015^{671} \cdot 11)^3$
..... **3p**

Problema 2. Determinați cifrele nenule a, b, c astfel încât $\overline{ab^2} = \overline{cab}$.

Soluție: Ultima cifră a lui $\overline{ab^2}$ este egală cu ultima cifră a lui \overline{cab} implică
 $b \in \{1, 5, 6\}$ **1 p**
Pentru $b = 1$ și $a \geq 4$ avem $\overline{a1} \geq 1000$ **1 p**
Pentru $b = 1$ și $a \in \{1, 2, 3\}$ relația nu se verifică. **1 p**
Pentru $b = 5$ și $a \geq 3$ avem $\overline{a5} \geq 1000$ **1 p**
Pentru $b = 5$ și $a \in \{1, 2\}$ relația se verifică atunci când $a = 2$. Obținem
 $c = 6$ **1 p**
Pentru $b = 6$ și $a \geq 3$ avem $\overline{a6} \geq 1000$ **1 p**
Pentru $b = 6$ și $a \in \{1, 2\}$ relația nu se verifică. **1 p**

Soluție alternativă:

Relația din enunț se scrie $\overline{ab} \cdot (\overline{ab} - 1) = 100 \cdot c$ **3 p**
Deoarece în membrul stâng avem un produs de două numere consecutive
deducem că $100 \cdot c$ are singura scriere convenabilă $25 \cdot (4 \cdot c)$ **3 p**
Așadar $4 \cdot c = 24$, de unde obținem $c = 6$ și $\overline{ab} = 25$ **1 p**

Problema 3. Se consideră un număr natural A scris cu n cifre nenule,
 $n \geq 1$. Numărul B este obținut din numărul A prin rearanjarea cifrelor
acestuia. Știind că $A + B = 10^n$ se cere:

- a) Pentru $n = 3$, dați un exemplu de numere A și B cu proprietatea din
enunț.
b) Arătați că n este număr impar.
c) Demonstrați că în scrierea lui A există cel puțin o cifră egală cu 5.

Soluție: a) Un exemplu este $A = 365$, $B = 635$ **2 p**
b)

A	...	a	b-1	c	a
B	...	b-1	a	d	b
	9	9	9	9	9	9	10

Tabelul are n coloane. Pe prima linie a tabelului sunt trecute cifrele numărului A , iar pe a doua linie sunt cifrele corespunzătoare ale numărului B .

Evident $a + b = 10$. Pe orice coloană, în afară de cea a unităților, suma cifrelor este egală cu 9. **1 p**

Deoarece a trebuie să apară și pe linia lui B , acesta se va grupa numai cu cifra $b - 1$. Cum cifra $b - 1$ nu poate apărea pe aceeași coloană la cele două numere, deoarece suma pe coloană ar fi pară, înseamnă că ea va apărea pe un număr par de coloane, în pereche cu cifra a **1 p**

Analog se întâmplă pentru oricare pereche de cifre (c, d) , $c + d = 9$.

Astfel, tabelul va avea un număr par de coloane, exceptând coloana unităților, deci, în concluzie, n este număr impar **1 p**

c) Numărul de apariții ale cifrei a pe prima linie trebuie să fie egal cu numărul de apariții ale lui a pe linia a doua. Prin urmare, dacă $a \neq b$, a va apărea din nou pe linia a doua cu $b - 1$ deasupra. Aceasta implică apariția cifrei $b - 1$ din nou pe a doua linie, evident cu a deasupra. Procesul acesta ar continua la infinit, ceea ce este absurd. Așadar $a = b$ și cum $a + b = 10$ rezultă $a = 5$, deci cifra 5 apare în număr. **2 p**

Problema 4. Se consideră mulțimea $M = \{2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{15}\}$.

a) Dați un exemplu de trei mulțimi, A , B , C , nevide și disjuncte două câte două astfel încât $A \cup B \cup C = M$, iar produsul elementelor fiecărei mulțimi să fie același?

b) Arătați că nu există trei mulțimi, X , Y , Z , nevide și disjuncte două câte două astfel încât $X \cup Y \cup Z = M$, iar suma elementelor fiecărei mulțimi să fie aceeași?

Soluție: a) Vom nota $p(X)$ produsul elementelor din mulțimea X .

$$p(M) = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{15} = 2^{1+2+3+\dots+15} = 2^{120} \dots \dots \dots \mathbf{1 p}$$

$$p(A) = p(B) = p(C) = 2^{40} \dots \dots \dots \mathbf{1 p}$$

Un exemplu este: $A = \{2^1, 2^6, 2^9, 2^{10}, 2^{14}\}$, $B = \{2^2, 2^3, 2^4, 2^8, 2^{11}, 2^{12}\}$, $C = \{2^5, 2^7, 2^{13}, 2^{15}\}$ **1 p**

Notă: Numai prezentarea exemplului se apreciază cu 3 puncte.

b) Presupunem că există mulțimile X , Y și Z astfel încât $X \cup Y \cup Z = M$ și $s(X) = s(Y) = s(Z)$ (*Am notat $s(X)$, $s(Y)$, $s(Z)$ sumele elementelor din mulțimile X , Y , Z*)

Fie 2^x , 2^y , 2^z cele mai mici elemente din mulțimile x , Y respectiv Z .

Putem considera că $x < y < z$.

Rezultă că 2^x divide $s(X)$ și 2^{x+1} nu divide $s(X)$, iar 2^y divide $s(Y)$. . .

..... **2 p**

Cum $x + 1 \leq y$, deducem că 2^{x+1} divide $s(Y)$. Înseamnă că $s(X) \neq s(Y)$

..... **2 p**