



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală - 13 februarie 2020

Clasa a VII-a

1. În dreptunghiul $ABCD$ se duc perpendicularele BE și DF pe diagonala (AC) , unde $E, F \in (AC)$.
 - a) Arătați că $BEDF$ este paralelogram.
 - b) Dacă $BD = 2 \cdot EF$, arătați că unghiul dintre diagonalele dreptunghiului este de 60° .
2. Se consideră numerele raționale $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2020}$ astfel încât
$$a_1 = 1 + \frac{1}{1}, a_2 = 1 + \frac{1}{2}, a_3 = 1 + \frac{1}{3}, \dots, a_{2020} = 1 + \frac{1}{2020}.$$
 - a) Demonstrați că $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2020}$ este număr natural;
 - b) Demonstrați că $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2019} - a_{2020} < \frac{1010}{1011}$.
3. Se consideră numerele $2 - \sqrt{3}$, 4 , $5 + \sqrt{3}$ și 7 . După un pas fiecare număr se înlocuiește cu media aritmetică a celorlalte trei numere. Este posibil ca după un anumit număr de pași să obținem numerele $4 - 2\sqrt{3}$, 3 , $2 + 2\sqrt{3}$ și 8 ? Justificați răspunsul.
4. În triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $m(\sphericalangle A) = 60^\circ$, se consideră $BD \perp AC$ ($D \in AC$), $CE \perp AB$ ($E \in AB$) și M mijlocul laturii BC . Demonstrați că triunghiul DEM este echilateral.

Gazeta Matematică – nr. 10/2019

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.