



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală - 13 februarie 2020

Clasa a VII-a - barem

- a)** Fie $\{O\} = AC \cap BD$ $DF \perp AC$, $BE \perp AC \Rightarrow DF \parallel BE$ 1p
- 1.** $\triangle DFO \equiv \triangle BEO \Rightarrow DF = BE \Rightarrow BEDF$ este paralelogram 2p
- b)** $AC = BD \Rightarrow BO = CO$ 1p
- O mijlocul lui AC și EF , $AC = 2EF \Rightarrow E$ mijlocul lui CO 1p
- Atunci $BO = BC \Rightarrow \triangle BOC$ echilateral $\Rightarrow m(\angle BOC) = 60^\circ$ 2p
- 2.**
- a)** $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{2020} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2021}{2020} = 2021$ 3p
- b)** $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2019} - a_{2020} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020} =$ 1p
- $= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020} <$ 1p
- $< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1010 \cdot 1011} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1010} - \frac{1}{1011} = \frac{1010}{1011}$ 2p
- 3.** Dacă la un anumit pas avem numerele a, b, c și d cu suma $a+b+c+d$ la următorul pas avem numerele $\frac{b+c+d}{3}, \frac{a+c+d}{3}, \frac{a+b+d}{3}$ și $\frac{a+b+c}{3}$ cu suma tot $a+b+c+d$ deci suma 2p
- numerelelor obținute la fiecare pas este o constantă. Cum $2 - \sqrt{3} + 4 + 5 + \sqrt{3} + 7 = 18$ și 3p
- $4 - 2\sqrt{3} + 3 + 2 + 2\sqrt{3} + 8 = 17$, rezultă că nu este posibil ca după un anumit număr de pași să obținem numerele $4 - 2\sqrt{3}, 3, 2 + 2\sqrt{3}$ și 8 . 2p
- 4.** În $\triangle BEC$, $m(\angle BEC) = 90^\circ$, EM mediana corespunzătoare ipotenuzei $\Rightarrow EM = \frac{BC}{2}$ și analog 2p
- $DM = \frac{BC}{2}$ deci $EM = DM$
- Fie $\{O\} = BD \cap CE$ și P, Q mijloacele lui OB, OC .
- $\triangle OEP, \triangle ODQ$ echilaterale $\Rightarrow \triangle EOD \equiv \triangle POQ \Rightarrow ED = PQ$ 3p
- PQ linie mijlocie în $\triangle OBC \Rightarrow PQ = \frac{BC}{2} \Rightarrow \triangle DEM$ este echilateral 2p

NOTĂ: Orice soluție corectă se punctează corespunzător.