

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a V-a

- 1. (7p)** Victor are 450 de lei în bancnote de 50 lei și 100 lei. Câte bancnote de fiecare fel are Victor, știind că numărul bancnotelor de 50 de lei este diferit de numărul bancnotelor de 100 de lei ?

prof. Ioan Sapariuc, Dumbrăveni

Soluție:

Dacă notăm cu x – numărul bancnotelor de 50 lei, și cu y – numărul bancnotelor de 100 lei, avem de rezolvat: $50 \cdot x + 100 \cdot y = 450 \Leftrightarrow x + 2y = 9$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y \Rightarrow y < 5$.

Atunci: $y = 4 \Rightarrow x = 1$; $y = 3 \Rightarrow x = 3$ (nu convine); $y = 2 \Rightarrow x = 5$; pentru $y = 1 \Rightarrow x = 7$.

Deci problema are 3 soluții: **1.** $x = 1, y = 4$; **2.** $x = 5, y = 2$ și **3.** $x = 7, y = 1$.

Barem:

Notează: x – numărul bancnotelor de 50 lei, și y – numărul bancnotelor de 100 lei	1p
$\Rightarrow 50 \cdot x + 100 \cdot y = 450 \Leftrightarrow x + 2y = 9$, cu $x, y \in \mathbb{N}$, $x \neq y \Rightarrow y < 5$.	2p
Discută toate cazurile posibile: $y = 4 \Rightarrow x = 1$; pentru $y = 3 \Rightarrow x = 3$ (nu convine); pentru $y = 2 \Rightarrow x = 5$; pentru $y = 1 \Rightarrow x = 7$.	2p
Finalizare: problema are 3 soluții: 1. $x = 1, y = 4$; 2. $x = 5, y = 2$ și 3. $x = 7, y = 1$.	2p

- 2. a) (3p)** Aflați x din: $x + \left[1^5 + (5^3)^{10} : 125 + (5^2)^9 - (5^9)^3 - 125^6 \right] \cdot 2001 = 1 + 2 + 3 + \dots + 2001$.

prof. Șlincu Gabriela, Suceava

- b) (4p)** Festivalul internațional *George Enescu* a fost inițiat în anul $\overline{abcd}$. Știind că $\overline{abcd}$ are cifra unităților egală cu 8, iar dacă ștergem această cifră numărul se micșorează cu $11011100011_{(2)}$, aflați anul inițierii acestui festival.

prof. Elena-Marcela Alexandru, Fălticeni

Soluție:

a) $x + \left(1 + 5^{30} : 5^3 + 5^{18} - 5^{27} - 5^{36} \right) \cdot 2001 = 2001 \cdot (2001 + 1) : 2$

$x + \left(1 + 5^{27} + 5^{18} - 5^{27} - 5^{18} \right) \cdot 2001 = 2001 \cdot 2002 : 2$

$x + 1 \cdot 2001 = 2001 \cdot 1001 \Rightarrow x = 2001 \cdot 1001 - 2001 \cdot 1 \Rightarrow x = 2001 \cdot (1001 - 1) \Rightarrow x = 2001000$

b) $11011100011_{(2)} = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 =$
 $= 1024 + 512 + 0 + 128 + 64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 1763$

$\overline{abcd} - \overline{abc} = 1763 \Rightarrow 10 \cdot \overline{abc} + d - \overline{abc} = 1763 \Rightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1763 - d \Leftrightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1755$

$\overline{abc} = 1755 : 9 \Rightarrow \overline{abc} = 195$, deci $\overline{abcd} = 1958$.

Barem:

a) Scrie $x + \left(1 + 5^{30} : 5^3 + 5^{18} - 5^{27} - 5^{36} \right) \cdot 2001 = 2001 \cdot (2001 + 1) : 2$	1p
$x + \left(1 + 5^{27} + 5^{18} - 5^{27} - 5^{18} \right) \cdot 2001 = 2001 \cdot 2002 : 2$	1p
$x + 1 \cdot 2001 = 2001 \cdot 1001 \Rightarrow x = 2001 \cdot 1001 - 2001 \cdot 1 \Rightarrow x = 2001 \cdot (1001 - 1) \Rightarrow x = 2001000$	1p
b) $11011100011_{(2)} = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 =$ $1 = 1024 + 512 + 0 + 128 + 64 + 32 + 0 + 0 + 0 + 2 + 1 = 1763$	1p
$\overline{abcd} - \overline{abc} = 1763 \Rightarrow 10 \cdot \overline{abc} + d - \overline{abc} = 1763 \Rightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1763 - d \Leftrightarrow 9 \cdot \overline{abc} = 1755$	2p
$\overline{abc} = 1755 : 9 \Rightarrow \overline{abc} = 195$, deci $\overline{abcd} = 1958$.	1p

3. a) (3p) Găsiți toate numerele de forma $\overline{abab}$, scrise în baza 10, care împărțite la 11 dau restul r număr prim și câtul c , iar $c - 26 \cdot r = 1$.

b) (4p) Determinați numerele naturale n și a , $a \neq 0$, pentru care

$$4^{n+3} + 3 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+1} + 15 \cdot 4^n = \overline{aaaa} + a.$$

prof. Gheorghe Iacoviță, Frătăuții Vechi

Soluție:

a) $\overline{abab} = 11 \cdot c + r$, $r < 11$ și $c - 26r = 1 \Rightarrow c = 26 \cdot r + 1 \Rightarrow \overline{abab} = 11 \cdot (26 \cdot r + 1) + r$

$\overline{abab} = 286 \cdot r + 11 + r \Leftrightarrow \overline{abab} = 287 \cdot r + 11$. Cum $r < 11$, r prim $\Rightarrow r$ poate lua valorile 2, 3, 5 sau 7. Pentru $r = 2$ sau $r = 3$ se obțin numere naturale de 3 cifre, deci nu convin. Pentru $n = 5$ se obține numărul natural $\overline{abab} = 287 \cdot r + 11 = 287 \cdot 5 + 11 = 1446$, care nu convine. Pentru $n = 7$ se obține numărul natural $\overline{abab} = 287r + 11 = 287 \cdot 7 + 11 = 2020$. Deci, singurul număr de forma $\overline{abab}$, care respectă condițiile din enunț este 2020.

b) $4^{n+3} + 3 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+1} + 15 \cdot 4^n = 4^n \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^n \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^n \cdot 4 + 15 \cdot 4^n = 4^n \cdot (4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 15)$
 $= 4^n \cdot (64 + 48 + 12 + 15) = 4^n \cdot 139 \Rightarrow 4^n \cdot 139 = \overline{aaaa} + a$

Pentru $n = 0$ și $n = 1$, nu convine, deoarece în membrul stâng obținem numere de 3 cifre, iar în membrul drept avem numere de 4 cifre.

Pentru $n = 2$, $4^n \cdot 139 = 4^2 \cdot 139 = 16 \cdot 139 = 2224 = 2222 + 2$, deci $a = 2$.

Pentru $n = 3$, $4^n \cdot 139 = 4^3 \cdot 139 = 64 \cdot 139 = 8896 = 8888 + 8$, deci $a = 8$.

Pentru $n \geq 4$ nu convine, deoarece $4^4 \cdot 139 = 256 \cdot 139 = 35584$ este un număr natural de 5 cifre (sau mai multe). În final, avem două soluții: $n = 2$, $a = 2$ și $n = 3$, $a = 8$.

Barem:

a) Scrie $\overline{abab} = 11 \cdot c + r$, $r < 11$; $c - 26 \cdot r = 1 \Rightarrow c = 26 \cdot r + 1 \Rightarrow \overline{abab} = 11 \cdot (26 \cdot r + 1) + r$	1p
$\overline{abab} = 286 \cdot r + 11 + r \Leftrightarrow \overline{abab} = 287 \cdot r + 11$ $r < 11$, r prim $\Rightarrow r$ poate fi 2, 3, 5 sau 7	1p
Pentru $r = 2$, $r = 3$, $r = 5$ se obțin numere naturale de 3 cifre, sau care nu convin, iar pentru $n = 7$ se obține numărul natural $\overline{abab} = 287r + 11 = 287 \cdot 7 + 11 = 2020$.	1p
b) Scrie $4^{n+3} + 3 \cdot 4^{n+2} + 3 \cdot 4^{n+1} + 15 \cdot 4^n = 4^n \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^n \cdot 4^2 + 3 \cdot 4^n \cdot 4 + 15 \cdot 4^n \Rightarrow 4^n \cdot 139 = \overline{aaaa} + a$	1p
Verifică pentru $n = 0$ și $n = 1$ și observă că soluțiile nu convin;	1p
Pentru $n = 2$, $4^n \cdot 139 = 4^2 \cdot 139 = 16 \cdot 139 = 2224 = 2222 + 2$, deci $a = 2$; Pentru $n = 3$, $4^n \cdot 139 = 4^3 \cdot 139 = 64 \cdot 139 = 8896 = 8888 + 8$, deci $a = 8$	1p
Observă că pentru $n \geq 4$ nu convine, deoarece $4^4 \cdot 139 = 256 \cdot 139 = 35584$ este un număr natural de 5 cifre (sau mai multe) și finalizează	1p

4. (7p) Un turist are de parcurs distanța dintre două orașe în 4 zile. În prima zi parcurge jumătate din distanță și încă 20 km. A doua zi parcurge o treime din distanța rămasă și încă 20 km. A treia zi parcurge un sfert din distanța rămasă și încă 20 km. Dacă în a patra zi a parcurs 55 km, atunci aflați distanța dintre cele două orașe.

(Supliment Gazeta Matematica, E19.121/2019)

Soluție:

Folosim metoda mersului invers. Fie a , distanța parcursă a treia zi. Atunci, cei 55 km parcursi în a patra zi reprezintă $\frac{3}{4}a - 20$ km. Deci, $\frac{3}{4}a - 20 = 55 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a = 75 \Rightarrow a = 100$ km $\Rightarrow 100 + 20 = 120$ km reprezintă două treimi din drumul rămas de parcurs în a doua zi, adică

$\frac{2}{3}b = 120 \Rightarrow b = 120 \cdot 3 : 2, b = 180$ km, unde b reprezintă drumul rămas de parcurs în a doua zi; atunci, $180 + 20 = 200$ km reprezintă jumătatea distanței dintre cele două orașe. În final, distanța cerută este $200 \cdot 2 = 400$ km.

Barem:

$\frac{3}{4}a - 20 = 55 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a = 75 \Rightarrow a = 100$ km (a = distanța parcursă a treia zi)	2p
$100 + 20 = 120$ km reprezintă două treimi din drumul rămas de parcurs în a doua zi	1p
$\frac{2}{3}b = 120 \Rightarrow b = 120 \cdot 3 : 2, b = 180$ km (b reprezintă drumul rămas de parcurs a doua zi)	2p
$180 + 20 = 200$ km reprezintă jumătatea distanței dintre cele două orașe.	1p
Finalizare: distanța cerută este $200 \cdot 2 = 400$ km.	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.