MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a VI-a

Problema 1. Câte numere naturale n au proprietatea $P(n) = S(n) = 8$, unde $P(n)$ și $S(n)$ reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului n (scris în baza 10)? Justificați răspunsul!

Problema 2. O mulțime M va fi numită *specială* dacă îndeplinește simultan condițiile:
- este nevidă și are ca elemente doar numere naturale;
- dacă $x \in M$ și x este par, atunci $\frac{x}{2} \in M$;
- dacă $x \in M$ și x este impar, atunci $3 \cdot x + 1 \in M$.

a) Arătați că, dacă M este o mulțime specială și $12 \in M$, atunci M are cel puțin 10 elemente.

b) Arătați că există o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare.

Problema 3. Ana are 200 de monede, având respectiv valorile $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{199}$. Ea le împarte în 100 de grupe de câte două monede, calculează sumele $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$ ale valorilor monedelor din fiecare grupă și află cel mai mare divizor comun D al numerelor $s_1, s_2, \ldots, s_{100}$.

a) Arătați că D este impar.

b) Determinați valoarea maximă a lui D pe care o poate obține Ana.

Problema 4. a) Arătați că orice triunghi poate fi împărțit în trei triunghiuri cu interioarele disjuncte, unul fiind dreptunghic, unul isoscel și unul ascuțitunghic.

b) Arătați că orice triunghi neisoscel poate fi împărțit în cinci triunghiuri cu interioarele disjuncte: unul isoscel, unul echilateral, unul ascuțitunghic, unul dreptunghic și unul obtuzunghic.

Timp de lucru 2 ore. Se adaugă 30 minute pentru întrebări
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Constanța, 16 aprilie 2022

CLASA a VI-a – soluții și bareme

Problema 1. Câte numere naturale n au proprietatea $P(n) = S(n) = 8$, unde $P(n)$ și $S(n)$ reprezintă produsul, respectiv suma cifrelor numărului n (scris în baza 10)? Justificați răspunsul!

Soluție. Sunt posibile numere de trei tipuri.

I. Numere cu o cifră 4, o cifră 2 și două cifre 1. Cifra 4 poate ocupa oricare dintre cele 4 poziții posibile, iar pentru fiecare alegere a poziției lui 4 există câte 3 alegeri a poziției lui 2, restul cifrelor fiind 1. Obținem astfel 12 numere de acest tip **3p**

II. Numere cu trei cifre 2 și două cifre 1. Pozițiile celor două cifre 1 se pot alege în 10 moduri, restul cifrelor fiind 2. Obținem astfel 10 numere de acest tip **3p**

III. Numărul 8. În total obținem 23 de numere **1p**

Problema 2. O mulțime M va fi numită *specială* dacă îndeplinește simultan condițiile:

- este nevidă și are ca elemente doar numere naturale;

- dacă $x \in M$ și x este par, atunci $\frac{x}{2} \in M$;

- dacă $x \in M$ și x este impar, atunci $3 \cdot x + 1 \in M$.

a) Arătați că, dacă M este o mulțime specială și $12 \in M$, atunci M are cel puțin 10 elemente.

b) Arătați că există o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare.

Soluție. a) Din $12 \in M$ reiese că M conține elementele 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1 .... **3p**

b) Dacă n este număr natural nenul, atunci $2^{2n} = \mathcal{M}_3 + 1$, deci $x_n = \dfrac{2^{2n} - 1}{3}$ este număr natural **2p**

Pentru $n > 1$, mulțimea $M = \{x_n, 2^{2n}, 2^{2n-1}, 2^{2n-2}, \ldots, 1\}$ este specială și are exact două elemente impare: x_n și 1. Obținem astfel o infinitate de mulțimi speciale care au exact două elemente impare **2p**

Problema 3. Ana are 200 de monede, având respectiv valorile 1, 2, 2^2, ..., 2^{199}. Ea le împarte în 100 de grupe de câte două monede, calculează sumele s_1, s_2, ..., s_{100} ale valorilor monedelor din fiecare grupă și află cel mai mare divizor comun D al numerelor s_1, s_2, ..., s_{100}.

a) Arătați că D este impar.

b) Determinați valoarea maximă a lui D pe care o poate obține Ana.

Soluție. a) Una dintre grupe este de forma $\{1, 2^n\}$, cu $n \geq 1$, deci suma s atașată ei este impară. Deoarece D divide s, rezultă că D este impar **2p**

b) Vom arăta că D maxim este $1 + 2^{100}$ **1p**

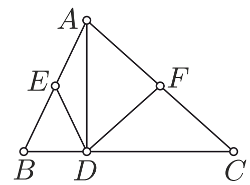
Dacă Ana formează grupele $\{2^n, 2^{n+100}\}$, cu $0 \leq n \leq 99$, atunci se obțin sumele $2^n(1 + 2^{100})$ iar în acest caz $D = 1 + 2^{100}$ **2p**

Pe de altă parte, dacă 2^{100} este grupat cu 2^n, $n > 100$, atunci $D \mid 2^n + 2^{100} = 2^{100}(1 + 2^{n-100})$ și D impar duce la $D \leq 1 + 2^{n-100} \leq 1 + 2^{99}$, iar dacă 2^{100} este grupat cu 2^n, $n < 100$, atunci

$D \mid 2^n + 2^{100} = 2^n(1 + 2^{100-n})$ și D impar duce la $D \leq 1 + 2^{100-n} \leq 1 + 2^{100}$, deci nu putem obține $D > 1 + 2^{100}$ **2p**

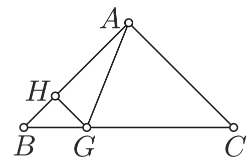
Problema 4. a) Arătați că orice triunghi poate fi împărțit în trei triunghiuri cu interioarele disjuncte, unul fiind dreptunghic, unul isoscel și unul ascuțitunghic.

b) Arătați că orice triunghi neisoscel poate fi împărțit în cinci triunghiuri cu interioarele disjuncte: unul isoscel, unul echilateral, unul ascuțitunghic, unul dreptunghic și unul obtuzunghic.



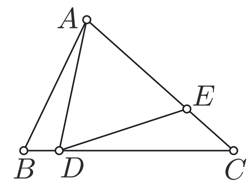
Soluție. a) Un triunghi oarecare ABC are cel puțin două unghiuri ascuțite. Dacă, de exemplu, acestea sunt $\angle B$ și $\angle C$, atunci înălțimea AD împarte $\triangle ABC$ în triunghiurile dreptunghice ABD și ACD **1p**

Ducând în $\triangle ABD$ și $\triangle ACD$ medianele DE, respectiv DF, obținem triunghiurile isoscele ADE, BDE, ADF și CDF **1p**



Dacă unul dintre ele este ascuțitunghic, problema este rezolvată. În caz contrar avem $\angle DEA = \angle DEB = \angle DFA = \angle DFC = 90°$, deci $\triangle ABC$ este dreptunghic isocel. În acest caz putem lua G pe BC astfel încât $\angle CAG > 45°$ și $GH \perp AB$, $H \in AB$ pentru a obține $\triangle ACG$ ascuțitunghic, $\triangle BGH$ isoscel și $\triangle AGH$ dreptunghic **1p**

b) Fără a pierde generalitatea, putem presupune $\angle A > \angle B > \angle C$.



Atunci $\angle A > 60°$ și putem lua D pe segmentul BC astfel încât $\angle CAD = 60°$. Deoarece $\angle ADC > \angle B > \angle C$, avem $AC > AD$, deci putem lua punctul E pe segmentul AC astfel încât $AE = AD$. Obținem astfel ADE echilateral, situat în interiorul $\triangle ABC$ **2p**

Deoarece $\angle DEC = 120°$, $\triangle DCE$ este obtuzunghic. Apoi, conform a), $\triangle ABD$ poate fi împărțit într-un triunghi dreptunghic, un triunghi ascuțitunghic și un triunghi isoscel **2p**