Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 8 Martie 2014

SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE –CLASA a VI-a

Problema 1. Arătaţi că:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3=1$;

b) $3^{33}+4^{33}+5^{33}<6^{33}$.

Gazeta Matematică

Soluţie

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{1}{2}+\frac{8}{27}+\frac{125}{216}=\frac{27+64+125}{216}=\frac{216}{216}=1$. ....**3 p**

b) Ar fi suficient să arătăm că $\frac{3^{33}}{6^{33}}+\frac{4^{33}}{6^{33}}+\frac{5^{33}}{6^{33}}<1$, adică $\left(\frac{1}{2}\right)^{33}+\left(\frac{2}{3}\right)^{33}+\left(\frac{5}{6}\right)^{33}<1$.
....**2 p**

Cum $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$ şi $\frac{5}{6}$ sunt subunitare, avem $\left(\frac{1}{2}\right)^{33}<\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{33}<\left(\frac{2}{3}\right)^3$ şi $\left(\frac{5}{6}\right)^{33}<\left(\frac{5}{6}\right)^3$. Adunând cele trei relaţii şi ţinând cont de *a)*, urmează inegalitatea dorită. . . **2 p**

Problema 2. Spunem că mulţimea nevidă M de cardinal n are proprietatea $\mathcal{P}$ dacă elementele sale sunt numere naturale care au exact 4 divizori. Notăm cu S_M suma tuturor celor $4n$ divizori ai elementelor unei astfel de mulţimi M (suma conţine şi termeni care se repetă).

a) Arătaţi că $A=\{2\cdot 37, 19\cdot 37, 29\cdot 37\}$ are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $S_A=2014$.

b) În cazul în care o mulţime B are proprietatea $\mathcal{P}$ şi $8\in B$, demonstraţi că $S_B\neq 2014$.

Soluţie

a) Orice număr de forma $p\cdot q$, unde p şi q sunt numere prime distincte, are exact patru divizori: 1, p, q şi pq. Cum 2, 19, 29 şi 37 sunt prime, rezultă că mulţimea A are proprietatea $\mathcal{P}$. ....**1 p**

$S_A=1+2+37+2\cdot 37+1+19+37+20\cdot 37+1+29+37+29\cdot 37=3\cdot 38+20\cdot 38+30\cdot 38=53\cdot 38=2014$ ....**2 p**

b) În afara lui 8, elementele lui B vor fi de forma $p\cdot q$ (cu numere prime distincte) sau p^3 (cu p număr prim impar). ....**1 p**

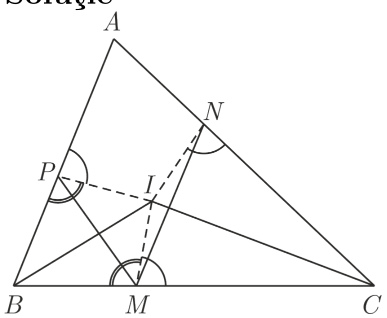
Cum măcar unul dintre numerele prime p şi q este impar, suma divizorilor lui pq, $1+p+q+pq=(1+p)(1+q)$, este număr par. Rezultă că suma divizorilor numerelor de forma $p\cdot q$ (cu p şi q numere prime distincte) este pară. ....**1 p**

Pentru p impar, suma divizorilor lui p^3, $1+p+p^2+p^3$, este număr par. Astfel suma divizorilor numerelor de forma p^3 (cu p număr prim impar) este pară. ....**1 p**

Suma divizorilor lui 8 este 15, număr impar. Rezultă că S_B este număr impar, prin urmare $S_B\neq 2014$. ....**1 p**

Problema 3. Pe laturile BC, CA şi AB ale triunghiului ABC se consideră punctele M, N respectiv P astfel încât $BM = BP$ şi $CM = CN$. Perpendiculara din B pe MP şi perpendiculara din C pe MN se intersectează în I. Demonstraţi că unghiurile $\widehat{IPA}$ şi $\widehat{INC}$ sunt congruente.

Soluţie



Cum $CM = CN$ şi $CI \perp MN$, rezultă că dreapta CI este mediatoarea segmentului MN. De aici, $IM = IN$. Analog se arată că $IM = IP$. .... **3 p**

Triunghiurile IMC şi INC sunt congruente (L.L.L.), deci $\widehat{IMC} \equiv \widehat{INC}$. Analog se arată că $\widehat{IMB} \equiv \widehat{IPB}$. .... **2 p**

Unghiurile $\widehat{IPA}$ şi $\widehat{IMC}$ sunt congruente, având suplemente congruente. Deducem că $\widehat{IPA} \equiv \widehat{INC}$. .... **2 p**

Problema 4. Determinaţi numerele naturale a pentru care există exact 2014 numere naturale b care verifică relaţia $2 \leq \dfrac{a}{b} \leq 5$.

Soluţie. Relaţia $2 \leq \dfrac{a}{b} \leq 5$ este echivalentă cu $\dfrac{a}{5} \leq b \leq \dfrac{a}{2}$, adică $2a \leq 10b \leq 5a$. ..... **1 p**

Înseamnă că în secvenţa $2a, 2a+1, \ldots, 5a$ trebuie să se afle exact 2014 multipli ai lui 10, adică secvenţa trebuie să conţină cel puţin 2013 decade de numere consecutive şi mai puţin de 2015 decade de numere consecutive. Deducem că $2013 \cdot 10 \leq 5a - 2a < 2015 \cdot 10$. Obţinem $a \in \{6710, 6711, \ldots, 6716\}$. .... **3 p**

Convin numerele: 6710, 6712 şi 6713. .... **3 p**

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru întrebări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.