



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A V-A

SUBIECTUL I

- a) (3p) Demonstrați că numărul $N = \overline{ab4} + \overline{aba} + \overline{a1b}$ este multiplu de 7, oricare ar fi cifrele a și b .
- b) (4p) Demonstrați că numărul $a = 4^{n^2+n} + 9^{n^2-n} - 2$ este multiplu de 5, oricare ar fi n un număr natural.

SUBIECTUL II

- a) (4p) Să se determine numărul $\overline{abc}$, știind că împărțit la $\overline{bc}$ dă câtul 8 și restul a .
- b) (3p) Determinați suma resturilor împărțirilor numerelor $1, 2, 3, \dots, 2020$ la 7.

SUBIECTUL III

- a) (4p) Comparați numerele:
 $a = 1+3+5+\dots+2019$ și $b = 2+4+6+\dots+2020$.
- b) (3p) Aflați ultima cifră a numărului $(a + 6)^b$.

SUBIECTUL IV

- a) (3p) Arătați că $2592 = 2^5 \cdot 3^4$;
- b) (4p) Determinați numerele naturale x, y, z din egalitatea:
 $4 \cdot 8^x + 8 \cdot 4^y + 2 \cdot 16^z = 2592$.

(Gazeta matematică)

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a V a****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a) $N=100a+10b+4+100a+10b+a+100a+10+b$1 punct

$$= 301a+21b+14$$
.....1 punct

$$=7(43a+3b+2):7$$
.....1 punct

b) $n^2+n=n(n+1):2$, deci $U(4^{n^2+n}) = 6$ (1).....1 punct

$$n^2-n=n(n-1):2$$
, deci $U(9^{n^2-n}) = 1$ (2).....1 punct

Din (1) și (2) rezultă $U(a) = 5$, deci $a:5$2 puncte

Subiectul II. a) $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot 8 + a$, unde $0 \leq a < \overline{bc}$ 1 punct

$$\text{Deci, } 100a+10b+c=(10b+c) \cdot 8+a \Rightarrow 99a=7 \cdot (10b+c) \Rightarrow 99a=7 \cdot \overline{bc}, \text{ cum } 7 \cdot \overline{bc} : 7 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow \overline{bc}=99 \Rightarrow b=c=9$$
..... 2 puncte

$$\Rightarrow \overline{abc}=799$$
..... 1 punct

b) Resturile la împărțirea cu 7 sunt 0,1,2,3,4,5,6.....1 punct

Cum $2020=7 \cdot 288+4$, suma resturilor va fi

$$S = 0 \cdot 288 + 1 \cdot 289 + 2 \cdot 289 + 3 \cdot 289 + 4 \cdot 289 + 5 \cdot 288 + 6 \cdot 288 = 6069$$
.....2 puncte

Subiectul III. a) $a=1+3+5+\dots+2019=1010^2$2 puncte

$$b=2+4+6+\dots+2020=1010 \cdot 1011$$
, deci $a < b$2 puncte

b) $U(a+6)=6$ 1 punct

$$\text{Deci, } U((a+6)^b)=6$$
.....2 puncte

Subiectul IV. a) Se verifică prin calcul..... 3 puncte

$$\text{b) } 4 \cdot 2^{3x} + 8 \cdot 2^{2y} + 2 \cdot 2^{4z} = 2^5 \cdot 3^4 \Rightarrow 2^{3x+2} + 2^{2y+3} + 2^{4z+1} = 2^5 \cdot 3^4 \Rightarrow 2^5 \cdot (2^{3x-3} + 2^{2y-2} + 2^{4z-4}) = 2^5 \cdot 3^4$$
.....2 puncte

$$\text{Deci, } 2^{3x-3} + 2^{2y-2} + 2^{4z-4} = 81 \quad (1)$$

$$\text{Cum } 2^0 + 2^4 + 2^6 = 81 \quad (2) \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Din (1) și (2)} \Rightarrow 2^{3x-3} = 2^0 \Rightarrow x=1$$

$$2^{2y-2} = 2^6 \Rightarrow y=4$$

$$2^{4z-4} = 2^4 \Rightarrow z=2 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VI-A

SUBIECTUL I

- a) (4p) Arătați că numărul $a = 3^{n+1} \cdot 2^n + 3^{n+2} \cdot 2^{n+1} - 16 \cdot 6^n$ este divizibil cu 5, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.
- b) (3p) Demonstrați că oricare ar fi 7 numere naturale există două a căror diferență este divizibilă cu 6.

SUBIECTUL II

- a) (4p) Determinați numerele naturale x, y, z știind că sunt invers proporționale cu 2, 3 și 9, iar $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{14}{37}$.
- b) (3p) Dacă a, b^2 și c^4 sunt direct proporționale cu 4, 9 și 25, iar $a \cdot b \cdot c = 7500$, aflați numerele naturale a, b și c .

SUBIECTUL III

Măsurile unghiurilor formate în jurul unui punct O sunt exprimate prin puteri ale numărului 5. Aflați numărul minim de unghiuri în condițiile date.

(Gazeta Matematică)

SUBIECTUL IV

Se dă un triunghi ABC isoscel cu $AB=AC$ și [BI bisectoarea unghiului ABC, unde $I \in (AC)$. Dacă diferența dintre unghiul de la bază și unghiul din vârf este de 36° și notăm $BI=a$ cm și $CI=b$ cm atunci:

- a) (4p) Arătați că punctul I aparține mediatoarei segmentului [AB];
- b) (3p) Calculați perimetrul triunghiului ABC în funcție de a și b .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 2 ore.



BAREM DE CORECTARE SI NOTARE

Clasa a VI a

Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a) $a = 3^n \cdot 3 \cdot 2^n + 3^n \cdot 3^2 \cdot 2^n \cdot 2 - 16 \cdot 6^n \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$$= 6^n \cdot (3+18-16) = 6^n \cdot 5 : 5, \text{ oricare ar fi } n \text{ natural } \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

b) Dintre cele 7 numere naturale există două care dau același rest la împărțirea cu 61 p

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6n + r \\ b = 6m + r \end{cases}, \text{ unde } r \in \{0,1,2,3,4,5\} \Rightarrow a-b = 6(n-m):6 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Subiectul II.

a) $2x=3y=9z=k \Rightarrow x=\frac{k}{2}, y=\frac{k}{3}, z=\frac{k}{9} \Rightarrow \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{9}{k} > \frac{14}{37} \Rightarrow \frac{14}{k} > \frac{14}{37} \Rightarrow k < 37 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Cum $x,y,z \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} k : 2 \\ k : 3 \\ k : 9 \end{cases} \Rightarrow k : [2,3,9] \Rightarrow k : 18, k < 37 \text{ și } k \text{ nenul} \Rightarrow k \in \{18,36\} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Pentru $k = 18 \Rightarrow x = 9, y = 6, z = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Pentru $k = 36 \Rightarrow x = 18, y = 12, z = 4 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

b) $\frac{a}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^4}{25} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 4k \\ b^2 = 9k \\ c^4 = 25k \end{cases}, a,b,c \text{ numere naturale} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Deci $k=25p^4$, unde p este număr natural, deci $a=5p$, $b=15p^2$, $c=100p^4$

Cum $abc = 7500$ rezultă $p = 1$ și deci $a = 100$, $b = 15$, $c = 5 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

Subiectul III. Fie x numărul unghiurilor de 5^0 , y numărul unghiurilor de 25^0 și z numărul unghiurilor de 125^0 , obținem $5^0 \cdot x + 25^0 \cdot y + 125^0 \cdot z = 360^0 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

$$\Rightarrow x + 5^0 \cdot (y + 5^0 \cdot z) = 72^0, \text{ de unde rezultă că } x = 2 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 5^0 \cdot (y + 5^0 \cdot z) = 70^0 \Rightarrow y + 5^0 \cdot z = 14^0, \text{ de unde rezultă } y = 4 \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

$$\Rightarrow 5^0 \cdot z = 10^0, \text{ de unde rezultă } z = 2 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

Subiectul IV. a) Se arată că $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = 72^0$ și $m(\widehat{A}) = 36^0 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Cum $[BI]$ bisectoarea $\widehat{ABC} \Rightarrow m(\widehat{BAI}) = m(\widehat{ABI}) = 36^0 \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

Deci $\triangle ABI$ este isoscel, de unde rezultă că $[IA] \equiv [IB]$, deci I

apartine mediatoarei segmentului $[AB] \dots\dots\dots 2 \text{ p}$

b) $AC = AB = AI + IC = BI + IC = (a+b) \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

$m(\widehat{IBC}) = m(\widehat{BIC}) = 36^0 \Rightarrow \triangle BIC$ este isoscel $\Rightarrow IC = BC = b \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

$P(\triangle ABC) = AB + AC + BC = (2a+3b) \text{ cm} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VII-A

SUBIECTUL I

a) (3p) Demonstrați că pentru orice număr natural nenul n , are loc egalitatea :

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

b) (4p) Determinați $[x]$, unde :

$$x = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} \text{ și } [x] = \text{partea \u00e2ntreag\u0103 a lui } x.$$

SUBIECTUL II

Să se rezolve în Z următoarea ecuație :

$$\left| \left| \left| \left| \left| \left| \left| \left| \left| x - 2^7 \cdot 2019 \right| - 2^6 \cdot 2019 \right| - 2^5 \cdot 2019 \right| - 2^4 \cdot 2019 \right| - 2^3 \cdot 2019 \right| - 2^2 \cdot 2019 \right| - 2 \cdot 2019 \right| - 2019 \right| = 2020 \quad .$$

SUBIECTUL III

Triunghiurile din plan ABC , BCD , BDE sunt dreptunghice în A , C și D , isoscele și niciunul nu este interior celuilalt. Perpendiculara din A pe BC întâlnește pe DE în M .

Știind că $CD = 5\text{cm}$, să se calculeze AM .

supliment GM

SUBIECTUL IV

Se consideră un cerc de centru O și diametru $AB = 8\text{cm}$ și punctul T , situat pe cerc, diferit de punctele A și B . Punctul C este intersecția tangentei la cerc în punctul T cu tangenta la cerc în punctul A și punctul D este intersecția tangentei la cerc în punctul T cu tangenta la cerc în punctul B . Lungimea segmentului AC este de 2cm . Se știe că $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

a) (4p) Demonstrați că triunghiul ABD este dreptunghic isoscel.

b) (3p) Dreptele AT și OC se intersectează în punctul M și dreptele BT și OD se intersectează în punctul N . Demonstrați că aria patrulaterului $MONT$ este egală cu $6,4\text{cm}^2$.

Model Evaluable Națională

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare exercițiu este notat de la 0 la 7 puncte.

Timp de lucru efectiv 3 ore.

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a VII a****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

Subiectul I. a) $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 3p

b) $x = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2020^2} < 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2019 \cdot 2020}$ 1p

$$x < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2019} - \frac{1}{2020}$$
 1p

$$1 < x < 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{2020}; \quad 1 < x < 2$$
 1p

$$[x] = 1$$
 1p

Subiectul II.

$$a_1 = \left| \left| \left| \left| \left| \left| x - 2^7 \cdot 2019 \right| - 2^6 \cdot 2019 \right| - 2^5 \cdot 2019 \right| - 2^4 \cdot 2019 \right| - 2^3 \cdot 2019 \right| - 2^2 \cdot 2019 \right| - 2 \cdot 2019 \right|$$

$$|a_1 - 2019| = 2020$$
 1p

$$a_1 \in \{-1; 2020+2019\}; a_1 > 0. \text{ Convine } a_1 = 2020+2019.$$

$$a_2 = \left| \left| \left| \left| \left| \left| x - 2^7 \cdot 2019 \right| - 2^6 \cdot 2019 \right| - 2^5 \cdot 2019 \right| - 2^4 \cdot 2019 \right| - 2^3 \cdot 2019 \right| - 2^2 \cdot 2019 \right|$$

$$|a_2 - 2 \cdot 2019| = 2020 + 2019.$$

$$a_2 \in \{-1; 2020 + 3 \cdot 2019\}; a_2 > 0. \text{ Convine } a_2 = 2020+3 \cdot 2019.$$
 2p

$$a_7 = \left| x - 2^7 \cdot 2019 \right| = 2020 + (2^7 - 1) \cdot 2019$$
 3p

$$x \in \{-1; 2020+(2^8 - 1) \cdot 2019\} = \text{mulțimea soluțiilor ecuației.}$$
 1p

Subiectul III.

figura corespunzătoare problemei 1p

AS = 2,5cm 3p

AM = 10cm 3p

Subiectul IV.

figura corespunzătoare problemei 1p

triunghiul ABD este dreptunghic isoscel 3p

TM este înălțimea corespunzătoare ipotenuzei în $\triangle TOC$; $TM = \frac{4}{\sqrt{5}}$ cm 1p

$OM = \frac{8}{\sqrt{5}}$ cm 1p

Finalizare 1p



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ 17.02.2020
CLASA A VIII-A

SUBIECTUL I

Fie expresia $E(x) = \left[1 - \frac{2x-2}{x+3} + \frac{x^2-2x+1}{(x+3)^2} \right]^{-1} \cdot \left(1 - \frac{x^2-3}{x} \right) : \frac{x^2-x-3}{-x}$

- a) (5p) Aduceți la forma cea mai simplă expresia $E(x)$, pentru valorile reale ale lui x din domeniul de existență;
 b) (2p) Determinați numerele întregi a , pentru care $E(a)$ este număr natural și are valoarea maximă 10.

SUBIECTUL II

a) (5p) Arătați că numărul : $\sqrt{2,25 - 3 \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{13-2\sqrt{13}}{13} - \left(\frac{13-2\sqrt{13}}{13} \right)^2} + 2 \cdot \frac{13-2\sqrt{13}}{13}}$

se poate scrie sub forma $a + b\sqrt{13}$, cu a și b numere raționale. (G.M. S.E.10.272)

- b) (2p) Pentru valorile a și b determinate la punctul a), arătați că $a^2 - 2ab + b^2 > 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

SUBIECTUL III

Pe planul triunghiului ABC cu unghiul drept în A , $AB = a\sqrt{3}$ și $m(\angle C) = 60^\circ$, se construiește perpendiculara MB , cu $MB = a$. Să se determine :

- a) (4p) Distanța de la punctul C la dreapta MN , unde N este Mijlocul lui AB .
 b) (3p) Tangenta unghiului format de dreapta CM cu planul (ABM) ;

SUBIECTUL IV

Fie $ABCD A'B'C'D'$ un cub cu muchia de 6cm.

- a) (4p) Arătați că dreapta de intersecție a planelor $(AB'C')$ și $(D'CB)$ este paralelă cu AD ;
 b) (3p) Calculați distanța dintre dreptele $D'C$ și AC' .

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.

**BAREM DE CORECTARE SI NOTARE****Clasa a VIII a****Olimpiada de matematică - Faza locală 17.02.2020**

- Nu se acordă puncte din oficiu.
- Pentru orice soluție corectă, diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Fiecare exercițiu este punctat de la 0 la 7.

	Etapele rezolvării	Punctaj
Subiectul I.	a) Se pun condițiile de existență : $x+3 \neq 0$, $x \neq 0$, $x^2 - x - 3 \neq 0$ și din expresia din paranteza dreaptă, adusă la forma $\left(\frac{x-1}{x+3} - 1\right)^{-2} = \left(\frac{x+3}{-4}\right)^2$ nu se impune nicio condiție în plus. Rezultă $x \in \mathbf{R} - \left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}; -3; 0\right\}$ $E(x) = \frac{(x+3)^2}{16}$	1p 1p 3p
	b) $E(a) \in \mathbf{N}$ dacă și numai dacă $(a+3)^2$ se divide cu 16 și notând $\frac{(a+3)^2}{16} = k$, impunem condiția $k \leq 10$ Se obține $a \in \{-15, -11, -7, 1, 5, 9\}$	1p 1p
Subiectul II.	a) Efectuând calculele se ajunge la $\frac{\sqrt{13}-2}{2}$, de unde $a = -1$ și $b = \frac{1}{2}$	3p 2p
	b) Se verifică inegalitatea, în care membrul stâng este 2,25 iar membrul drept $\sqrt{5}$	2p
Subiectul III.	a) Se dem. că $CA \perp (MAB)$, construim $AP \perp MN$ și, din $T_3 \perp$ se deduce că $d(C, MN) = CP$ Din asemănarea triunghiurilor APN și MBN se determină $AP = \frac{a\sqrt{21}}{7}$ și apoi se calculează CP din triunghiul CAP, cu	1p 2p 1p



	T. Pitagora, obținându-se $CP = \frac{a\sqrt{70}}{7}$	
	b) Cum $CA \perp (ABM)$ rezultă că unghiul dintre CM și (ABM) este $\square CMA$. Din triunghiul CMA cu $m(\square A) = 90^\circ$, $AC = a$ și $AM = 20$ se determină $tg(\square CMA) = \frac{1}{2}$	1p 2p
Subiectul IV.	a) Din planul $(AB'C')$ face parte dreapta DC', iar din planul $(D'CB)$ face parte dreapta $A'B$. Notând intersecția diagonalelor feței $ABB'A'$ cu E și intersecția diagonalelor feței $DCC'D'$ cu F, deducem că dreapta de intersecție a planelor $(AB'C')$ și $(D'CB)$ este EF. Se dem. că $ADFE$ este paralelogram, de unde $EF \parallel AD$	1p 1p 2p
	b) Fie M mijlocul lui $C'A$. În triunghiul dreptunghic $C'CA$, CM este mediana corespunzătoare ipotenuzei, $CM = \frac{C'A}{2}$ apoi, analog, $D'M = \frac{C'A}{2}$, de unde se deduce $CM = D'M$ Din MF mediana corespunzătoare bazei triunghiului isoscel $D'MC$ rezultă $MF \perp D'C$. Se arată că $D'C \perp (ADC')$ și, construind $FG \perp C'A$, cum FG este inclusă în (ADC'), rezultă $D'C \perp FG$, așadar FG este perpendiculară atât pe $D'C$, cât și pe AC'. $FG = h$ în triunghiul dreptunghic MFC', cu $\square F$ drept, deci $FG = \frac{FM \cdot FC'}{C'M} = \sqrt{6} \text{ cm.}$	1p 1p 1p