

**Olimpiada Națională de Matematică**  
**Etapa Județeană și a Municipiului București, 8 Martie 2014**

**CLASA a VIII-a**

**SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Problema 1.** În paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A' B' C' D'$  cu  $AB = 12\sqrt{3}$  cm și  $AA' = 18$  cm, se consideră punctele  $P \in [AA']$  și  $N \in [A'B']$  astfel încât  $A'N = 3B'N$ .

Determinați lungimea segmentului  $[AP]$  astfel încât, pentru orice punct  $M \in [BC]$ , triunghiul  $MNP$  să fie dreptunghic în  $N$ .

*Gazeta Matematică*

**Soluție.** Deoarece  $BC \perp (ABB')$ , rezultă  $BC \perp PN$  ..... **1p**  
Cum  $PN \perp NM$ , rezultă  $PN \perp (NBC)$ , de unde  $PN \perp NB$ , adică  
triunghiul  $NBP$  este dreptunghic în  $N$  ..... **2p**  
Notând  $AP = x$ , se obține  $BP^2 = x^2 + 432$ ,  $PN^2 = (18 - x)^2 + 243$  și  
 $BN^2 = 351$ . Întrucât  $BP^2 = PN^2 + BN^2$ , se obține  $x = 13,5$  cm ..... **4p**

**Problema 2.** Pentru fiecare număr natural nenul  $n$  se notează cu  $p(n)$  cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu  $n$ .

a) Determinați numărul perechilor de numere naturale nenule  $(m, n)$ , cu  $m \leq n$ , pentru care

$$p(2m + 1) \cdot p(2n + 1) = 400.$$

b) Determinați mulțimea  $\left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 100 \text{ și } \frac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N} \right\}$ .

**Soluție.** a) Sunt posibile trei cazuri:

Cazul 1:  $p(2m - 1) = 1$ ,  $p(2n - 1) = 400$ ; se obține  $1 \leq 2m - 1 < 4$  și  
 $400 \leq 2n - 1 < 441$ , de unde  $m \in \{1, 2\}$  și  $n \in \{200, 201, \dots, 219\}$  ..... **1p**

Cazul 2:  $p(2m - 1) = 4$ ,  $p(2n - 1) = 100$ ; rezultă  $4 \leq 2m - 1 < 9$  și  
 $100 \leq 2n - 1 < 121$ , de unde  $m \in \{3, 4\}$  și  $n \in \{51, 52, \dots, 60\}$  ..... **1p**

Cazul 3:  $p(2m - 1) = 16$ ,  $p(2n - 1) = 25$ ; atunci  $16 \leq 2m - 1 < 25$  și  
 $25 \leq 2n - 1 < 36$ , de unde  $m \in \{9, 10, 11, 12\}$  și  $n \in \{13, 14, \dots, 18\}$  .... **1p**

În primul caz se formează 40 de perechi, în al doilea caz se formează 20  
de perechi, iar în al treilea 24 de perechi; în total sunt 84 de perechi ca în  
enunț ..... **1p**

b) Fie  $n \in \mathbb{N}$ . Notând  $p(n) = k^2$ , rezultă  $k^2 \leq n \leq (k + 1)^2 - 1$ , de unde  
 $k^2 < n + 1 \leq (k + 1)^2$ . Ca urmare,  $p(n + 1) \in \{k, k + 1\}$  ..... **1p**

Atunci  $\frac{p(n+1)}{p(n)} \notin \mathbb{N}$  dacă și numai dacă  $p(n) = k^2 \neq 1$  și  $p(n + 1) =$   
 $(k + 1)^2$ , adică  $n = (k + 1)^2 - 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 2$ . Cum  $n \leq 100$ , rezultă  $k \leq 9$ .

Mulțimea cerută este  $\{8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, 99\}$  ..... **2p**

**Problema 3.** În vârful  $A$  al hexagonului regulat  $ABCDEF$  de latură  $a$  se ridică perpendiculara  $AS = 2a\sqrt{3}$  pe planul hexagonului. Punctele  $M, N, P, Q$ , respectiv  $R$  sunt proiecțiile punctului  $A$  pe dreptele  $SB, SC, SD, SE$ , respectiv  $SF$ .

- a) Demonstrați că punctele  $M, N, P, Q, R$  sunt coplanare.
- b) Determinați măsura unghiului format de planele  $(MNP)$  și  $(ABC)$ .

**Soluție.** a) Cu teorema celor trei perpendiculare, din  $SA \perp (ABC)$  și  $AB \perp BD$ , rezultă  $SB \perp BD$ . Întrucât  $BD \perp AB$  și  $BD \perp SB$ , obținem  $BD \perp (SAB)$ , de unde  $BD \perp AM$  ..... **1p**

Deoarece  $AM \perp SB$ , rezultă  $AM \perp (SBD)$ , deci  $AM \perp SD$ . De aici, ținând cont că  $SD \perp AP$ , rezultă  $SD \perp (AMP)$  ..... **1p**

Analog, se arată că  $SD \perp (ARP)$ ,  $SD \perp (ANP)$  și  $SD \perp (AQP)$ . Din unicitatea planului perpendicular pe o dreaptă într-un punct, rezultă că punctele  $A, M, N, P, Q, R$  sunt coplanare ..... **2p**

b) Folosind eventual faptul că  $MR \parallel BF$ , se arată că dreapta de intersecție a planelor  $(MNP)$  și  $(ABC)$  este paralela  $d$  dusă prin  $A$  la  $BF$  ..... **1p**

Cum  $d \perp SA$  și  $d \perp AD$ , rezultă  $d \perp (SAD)$ , deci  $d \perp AP$ . Ca urmare, măsura unghiului format de planele  $(MNP)$  și  $(ABC)$  este egală cu măsura unghiului  $PAD$  ..... **1p**

Folosind teorema lui Pitagora, se obține  $SD = 4a$ , de unde rezultă  $m(\widehat{PDA}) = 60^\circ$  și  $m(\widehat{PAD}) = 30^\circ$  ..... **1p**

**Problema 4.** Fie  $n \geq 2$  un număr natural. Determinați mulțimea valorilor pe care le poate lua suma

$$S = [x_2 - x_1] + [x_3 - x_2] + \dots + [x_n - x_{n-1}],$$

unde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt numere reale cu partea întreagă  $1, 2, \dots, n$ .

**Soluție.** Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Atunci  $[a] \leq a < [a] + 1$ , de unde  $-[a] - 1 < -a \leq -[a]$ . Adunând cu  $[b] \leq b < [b] + 1$ , rezultă

$$[b] - [a] - 1 < b - a < [b] - [a] + 1,$$

de unde se obține  $[b] - [a] - 1 \leq [b - a] \leq [b] - [a]$  ..... **2p**

Atunci  $[x_k] - [x_{k-1}] - 1 \leq [x_k - x_{k-1}] \leq [x_k] - [x_{k-1}]$ , de unde  $0 \leq [x_k - x_{k-1}] \leq 1$ , pentru orice  $k = 2, 3, \dots, n$ . Ca urmare,  $0 \leq S \leq n - 1$  . **2p**

Vom arăta că mulțimea valorilor pe care le poate lua  $S$  este  $\{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ .

Valoarea maximă  $S = n - 1$  se obține, de exemplu, pentru  $x_k = k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ..... **1p**

Suma  $S = p$ , unde  $0 \leq p \leq n - 2$ , se obține, de exemplu, pentru:

$$x_k = \begin{cases} k + \frac{1}{k+1}, & \text{dacă } 1 \leq k \leq n - 1 - p \\ k, & \text{dacă } n - p \leq k \leq n \end{cases} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$