INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ
Str. Ion Maiorescu Nr. 6, 200760 Craiova,
Telefon 0251/420961; 0351/407395 (407397) Fax: 0251/421824, 0351/407396
E-mail: isjdolj@isjdolj.ro Web: www.isjdolj.ro
MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
08.02.2020

Clasa a V-a

1. Iulia și Ștefan au cumpărat de la chioșcul alimentar al școlii patiserie pentru ei și colegi din clasă. Iulia a cumpărat 5 plăcinte cu brânză, 2 ștrudele cu mere, 7 croissante și a plătit 26 lei. Ștefan a cumpărat 3 plăcinte cu brânză, 2 ștrudele cu mere, 4 croissante și a plătit 17 lei. Cât costă fiecare produs de patiserie, dacă o plăcintă cu brânză este de trei ori mai scumpă decât un croissant?

2. a) Fie $a = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2020}$ şi $b = 3^{2021} - 3^{2020} - 3^{2019}$. Arătaţi că restul împărţirii numărului $14a + 7$ la numărul b este un număr natural pătrat perfect.

b) Fie $a = n^2(n+1)^2 + 1$. Arătaţi că numărul:
$2016^a + 2017^a + 2018^a + 2019^a$ se divide cu 10.

3. a) Determinaţi numărul natural $\overline{aa}$ pentru care:
$\overline{aa}^2 + a^b + a^2 + 4 \cdot a : a = 2020$, unde b este număr natural.

b) Determinați numerele naturale x, y, z pentru care:
$7^x + 3^y + 2^z = 293$.

4. Un număr se numeşte **5 - *puternic*** dacă se scrie ca o sumă de trei puteri consecutive ale lui 5, exponenţii puterilor lui 5 fiind numere naturale nenule.

a) Să se determine numerele de trei cifre care sunt **5 – *puternice***.
b) Să se arate că suma primelor 2020 numere **5 – *puternice*** este divizibilă cu 31 și nu este un pătrat perfect.
c) Să se demonstreze că, fiind date trei numere **5 – *puternice***, există două numere dintre acestea al căror produs este un pătrat perfect.

Notă:

- *Toate subiectele sunt obligatorii;*
- *Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;*
- *Timp de lucru: 2 ore.*

Soluții și bareme de corectare orientative

Clasa a V-a

Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

1. 5 plăcinte cu brânză …. 2 ștrudele cu mere …. 7 croissante …. 26 lei;
3 plăcinte cu brânză …. 2 ștrudel cu mere …. 4 croissante …. 17 lei. **(2p)**
Se scad cele două relații și se obține:
2 plăcinte cu brânză …. 3 croissante …. 9 lei. **(2p)**
Dar o plăcintă este de trei ori mai scumpă decât un croissant, deci
$(6+3)=9$ croissante$=9$ lei $\Longrightarrow 1$ croissant $=1$ leu, 1 plăcintă cu brânză $=3$ lei,
2 ștrudele cu mere$=17-4\cdot 1-3\cdot 3=4$ lei, deci 1 ștrudel cu mere $=2$ lei. **(3p)**

2. a) Din $a=1+3+3^2+\ ...+3^{2020}$ prin înmulţire cu 3 se obţine
$3a=3+3^2+3^3+\cdots+3^{2021}$ şi prin scăderea relaţiilor, obţinem: $2a=3^{2021}-1$, deci
$2a+1=3^{2021}$, iar $14a+7=7\cdot 3^{2021}$. **(2p)**
Scoţând factor comun pe 3^{2019} se obţine $b=5\cdot 3^{2019}$. **(1p)**
Dar $14a+7=63\cdot 3^{2019}=(5\cdot 12+3)\cdot 3^{2019}=12b+3^{2020}$. Cum $3^{2020}<b$ restul împărţirii lui $14a+7$ la b este $3^{2020}=(3^{1010})^2$, deci pătrat perfect. **(1p)**

b) Produsul a două numere naturale consecutive este număr par, deci $a=M_4+1$. **(1p)**
De aici obţinem $U(2016^a)=6, U(2017^a)=7, U(2018^a)=8, U(2019^a)=9$, **(1p)**
iar $U(2016^a+2017^a+2018^a+2019^a)=U(6+7+8+9)=0$, deci $2016^a+2017^a+2018^a+2019^a$ este divizibil cu 10. **(1p)**

3. a) Analizând egalitatea constatăm că pentru a obţine rezultatul 2020 trebuie ca $\overline{aa}^2$ să fie cât mai apropiat de 2020.
Dacă $\overline{aa}=55$, am obţine $55^2=3025>2020$, de aceea trebuie micşorată valoarea lui a. **(1p)**
Pentru $a=4$ obţinem $44^2=1936$ şi înlocuind obţinem: $44^2+4^b+4^2+4\cdot 4:4=2020$, de unde avem $1936+4^b+16+4=2020 \Rightarrow 4^b=2020-1936-20 \Leftrightarrow 4^b=64 \Leftrightarrow 4^b=4^3 \Rightarrow b=3$.
Într-adevăr, pentru $b=3$, obţinem $\overline{aa}=44$. **(1p)**
Pentru $a\leq 3$, problema nu admite soluții. **(1p)**

b) 7^x**,** 3^y şi 293 sunt numere impare, pentru orice numere naturale $x,y \Rightarrow$
$\Rightarrow 2^z$ este impar $\Rightarrow z=0 \Rightarrow 7^x+3^y=292$, $7^3=343<292 \Rightarrow x<3 \Rightarrow x\in\{0,1,2\}$. **(2p)**
Dacă $x=0 \Rightarrow 3^y=291$, nu convine.
Dacă $x=1 \Rightarrow 3^y=285$, nu convine. **(1p)**
Dacă $x=2 \Rightarrow 3^y=243=3^5 \Rightarrow y=5$. Deci soluția este $x=2,\ y=5, z=0$. **(1p)**

4. Fie A un număr **5 –** ***puternic***, atunci
$A=5^n+5^{n+1}+5^{n+2}=5^n(1+5+5^2)=5^n\cdot 31, n\in\mathbb{N}^*$. **(1p)**
a) Pentru $n=1 \Rightarrow A=5\cdot 31=155$, pentru $n=2 \Rightarrow A=25\cdot 31=775$. Pentru $n\geq 3$, se vor obține numere mai mari de trei cifre ($A>999$), deci avem doar două soluții. **(2p)**
b) Suma primelor 2020 numere **5 –** ***puternice*** este $S=5\cdot 31+5^2\cdot 31+\cdots+5^{2020}\cdot 31=$
$=31\cdot(5+5^2+5^3+\ldots+5^{2020})\,⋮31$. De aici deducem că $31|S$. Pentru ca S să fie pătrat perfect trebuie ca $31^2|S$, adică $31|T$, unde $T=5+5^2+5^3+\ldots+5^{2020}$. Suma $T=5+5^2+5^3+\ldots+5^{2020}$ are 2020 termeni și se poate scrie:

$T = 5 + 5^2(1 + 5 + 5^2) + \ ... + 5^{2018}(1 + 5 + 5^2) = 5 + 5^2 \cdot 31 + \cdots + 5^{2018} \cdot 31$, ceea ce arată 31 nu divide T. **(2p)**

c) Fie $5^a \cdot 31,\ 5^b \cdot 31, 5^c \cdot 31$ trei numere **5 – *puternice***. Produsele a câte două dintre ele sunt $5^{a+b} \cdot 31^2$, $5^{b+c} \cdot 31^2$ și $5^{c+a} \cdot 31^2$. Dintre numerele $a + b, b + c, c + a$ cel puțin unul este par. Dacă $a + b$ este număr par, avem $5^{a+b} \cdot 31^2 = 5^{2k} \cdot 31^2 = (5^k \cdot 31)^2$, adică este un pătrat perfect. **(2p)**