Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
Clasa a X-a

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Numărul raţional r pentru care este adevărată egalitatea:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arctg}\frac{3}{r}=\operatorname{arctg}5$$

este egal cu:

A $\frac{3}{4}$ **B** $\frac{6}{5}$ **C** 9 **D** 4 **E** $\frac{25}{3}$

2. Funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\log_2(3+x)+4^x$ este inversabilă, inversa ei fiind funcţia g. Numărul $A=g\left(\frac{1}{4}\right)+g(7)$ este egal cu:

A 0 **B** 2 **C** $\frac{29}{4}$ **D** $\frac{7}{4}$ **E** $\frac{4}{7}$

3. Dacă z este un număr complex pentru care $z+\frac{1}{z}=\sqrt{2}$, atunci numărul $w=z^{2021}+\frac{1}{z^{2021}}$ este egal cu:

A $\mathrm{i}\sqrt{2}$ **B** $-\mathrm{i}$ **C** $-\sqrt{2}$ **D** $\sqrt{2}$ **E** 1

4. Se consideră o funcţie injectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că:

$$f(x)\cdot f(y)=x\cdot f(y)+y\cdot f(x)-f(xy),\ \text{pentru orice } x,y\in\mathbb{R}.$$

Dacă $f(1)\neq 1$, atunci numărul $f(2021)$ este egal cu:

A 2022 **B** 2020 **C** 1010 **D** 1011 **E** 4042

5. Se consideră mulţimea $B=\{x\in\mathbb{R}|\log_x(3x^2+4x)+\log_{x^2}(3x+4)=4\}$. Stabiliţi care dintre următoarele relaţii este adevărată:

A $B\subset\left(0,\frac{9}{4}\right)$ **B** $B\subset\left(\frac{5}{2},\frac{10}{3}\right)$ **C** $B\subset\left(\frac{7}{2},\frac{29}{7}\right)$ **D** $B\subset\left(\frac{21}{5},\frac{37}{6}\right)$ **E** $B\subset\left(\frac{19}{3},\frac{17}{2}\right)$

6. Suma inverselor elementelor mulţimii $C=\left\{x\in\mathbb{R}|\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{x-2}=1\right\}$ este egală cu:

A $\frac{3}{25}$ **B** $\frac{1}{10}$ **C** $\frac{1}{25}$ **D** $\frac{3}{10}$ **E** $\frac{3}{50}$

7. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ o funcţie cu proprietatea că $f(x)+f(\alpha x)=x,\forall x\in\mathbb{C}$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$ astfel încât $\alpha^2+\alpha+1=0$. Numărul $f(\alpha^2)$ este egal cu:

A 1 **B** i **C** 0 **D** -1 **E** $-\mathrm{i}$

8. Se consideră expresia $E(x)=x^2-x\cdot\log_2 y+2\cdot\log_2 y-3$. Numărul numerelor naturale y pentru care $E(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, este egal cu:

A 61 **B** 42 **C** 3 **D** 59 **E** 43

9. Dacă $x,y\in(0,+\infty)$ şi $\log_4 x=\log_6 y=\log_9(x+y)$, atunci numărul $a=\frac{x}{x+y}$ este egal cu:

A $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ **B** $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ **C** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **D** $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$ **E** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$

10. Pentru orice număr real a se notează cu $[a]$ partea sa întreagă. Numărul elementelor mulţimii $A=\left\{\ n=\overline{2,2021}\ \middle|\ 1+[\log_2(n-1)]=[\log_2 n]\right\}$ este egal cu:

A 11 **B** 1010 **C** 1001 **D** 1009 **E** 10

11. Se consideră mulţimea $M = \left\{x \in \mathbb{R} | x^{\log_3(x-1)} + 2(x-1)^{\log_3 x} \leq 3x^2\right\}$. Numărul elementelor mulţimii $M \cap \mathbb{N}$ este egal cu:

A 9 **B** 10 **C** 4 **D** 8 **E** 7

12. Dacă $S = \left\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)\right\}, n \in \mathbb{N}^*, x_k, y_k \in \mathbb{N}^*$, este mulţimea soluţiilor sistemului de ecuaţii $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \dfrac{x+y}{2} \\ 2^x - 2^y = y^2 - x^2 \end{cases}$, atunci numărul $t = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k + \sum\limits_{k=1}^{n} y_k$ este egal cu:

A 4 **B** 8 **C** 12 **D** 6 **E** 10

13. Pentru $n \in \mathbb{N}$ şi $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, se notează $x_k = (\sqrt{2})^{n-k} \cdot (\sqrt[4]{5})^k$. Suma numerelor naturale n pentru care mulţimea $X = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ conţine exact 10 numere raţionale, este egală cu:

A 36 **B** 74 **C** 38 **D** 78 **E** 70

14. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale pozitive cu $a_1 = 1$ şi $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{a_k + a_{k+1}} = a_n - 1, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dacă $s_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{\log_k a_k}$, atunci numărul s_{2021} este egal cu:

A 1052 **B** 4038 **C** 4042 **D** 1050 **E** 4040

15.

Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie injectivă astfel încât mulţimea

$$A = \{a \in (0, \infty) \,|\, \text{funcţia } g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = f\left(2^x\right) + f\left(a^x\right) \text{este constantă}\},$$

este nevidă.

Atunci:

A A este finită şi $\prod\limits_{a \in A} a = \dfrac{1}{4}$ **B** A este finită şi $\prod\limits_{a \in A} a = \dfrac{1}{2}$ **C** A este finită şi $\prod\limits_{a \in A} a = 1$

D A este finită şi $\prod\limits_{a \in A} a = 2$ **E** A este infinită

16. Fie $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a, b \leq 100$. Numărul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care funcţiile $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(ax + b - 1)$ şi $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = f(bx + a - 1)$ sunt strict monotone, de monotonii diferite, este egal cu:

A 9 801 **B** 10 000 **C** 9 900 **D** 4 950 **E** 0

17. Numărul soluţiilor, din intervalul $[0, 4\pi]$, ale ecuaţiei $\sin x - \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3} = 0$, este egal cu:

A 3 **B** 6 **C** 4 **D** 5 **E** 7

18. Se notează cu A mulţimea punctelor $M_k(x_k, y_k)$ dintr-un reper xOy, ale căror afixe z_k verifică inegalităţile $|z_k - \mathrm{i}| \leq 2$ şi $|z_k - 4 + 2\,\mathrm{i}| \leq 3$. Numărul $T = \sum\limits_{M_k \in A} (x_k + y_k)$ este egal cu:

A $\dfrac{9}{5}$ **B** $\dfrac{19}{10}$ **C** $\dfrac{13}{10}$ **D** $\dfrac{7}{5}$ **E** $\dfrac{22}{15}$

19. Se consideră numerele $a, b, c \in (2, +\infty)$ astfel încât $\dfrac{1}{a-1} + \dfrac{1}{b-1} + \dfrac{1}{c-1} = 1$. Valoarea minimă a produsului $p = abc$ este egală cu:

A $\dfrac{27}{8}$ **B** 8 **C** 64 **D** 27 **E** $\dfrac{125}{3}$

20. Numărul numerelor întregi m pentru care există $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ astfel încât:
$\cos 4x + (m + 3) \cdot (\sin x + \cos x)^2 - 3m - 2 = 0$, este egal cu:

A 3 **B** 5 **C** 2 **D** 0 **E** 1

21. Produsul soluţiilor ecuaţiei $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$ este egal cu:

A 0 **B** 1 **C** -1 **D** $-\sqrt{3}$ **E** $\sqrt[3]{4}$

22. Pentru orice numere naturale $m, n \geq 2$ şi orice număr real $x > 0$ se notează

$$F(x) = \sqrt[3]{x^m \cdot \sqrt[n]{x}} \cdot \sqrt{x^n \cdot \sqrt[m]{x}}\,.$$

Numărul perechilor (m, n) pentru care $F(x) = x^3, \forall x \in (0, +\infty)$ este egal cu:

A 3 **B** 6 **C** 2 **D** 4 **E** 1

23. Se consideră numerele complexe z_1, z_2, z_3 cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$, $z_1 + z_2 + z_3 \neq 0$ şi $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. Numărul $|z_1 + z_2 + z_3|$ este egal cu:

A 1 **B** 6 **C** 2 **D** 4 **E** 8

24. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie surjectivă cu proprietatea că $f(f(x)+y) = f(x)+f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Dacă $f^2(2) - f^2(1) = 2003$, numărul $f(2021)$ este egal cu:

A 1021 **B** 3021 **C** 4042 **D** 4021 **E** 6063