Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 martie 2018

CLASA a 10-a
Soluţii şi barem de notare

Problema 1. Să se afle x pentru care

$$\log_2(x^2+4) - \log_2 x + x^2 - 4x + 2 = 0.$$

Soluţie. Avem $x > 0$ şi ecuaţia se scrie echivalent

$$\log_2\left(x + \frac{4}{x}\right) = 2 - (x-2)^2.$$

....3p

Cum $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$, obţinem $\log_2\left(x + \frac{4}{x}\right) \geq 2$ 2p

Pe de altă parte, $2 - (x-2)^2 \leq 2$ 1p

deci ecuaţia are soluţia unică $x = 2$ 1p

Problema 2. Să se arate că numărul

$$\sqrt[n]{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}} + \sqrt[n]{\sqrt{2018} - \sqrt{2017}}$$

este iraţional, pentru orice $n \geq 2$. *Gazeta Matematică*

Soluţie. Să presupunem că, pentru un anumit n, numărul este raţional. Notăm $a = \sqrt[n]{\sqrt{2018} + \sqrt{2017}}$, $b = \sqrt[n]{\sqrt{2018} - \sqrt{2017}}$. Atunci $a + b \in \mathbb{Q}$ şi $ab = 1$...1p

Dacă $s_k = a^k + b^k$, atunci $(s_k)_{k \geq 0}$ verifică relaţia de recurenţă

$$s_{k+2} - (a+b)s_{k+1} + s_k = 0,$$

pentru orice $k \geq 0$..3p

Cum $s_0 = 2$ şi $s_1 = a + b \in \mathbb{Q}$, deducem că $s_k \in \mathbb{Q}$, pentru orice k.... 2p

În particular, $s_n = 2\sqrt{2018} \in \mathbb{Q}$, contradicţie 1p

Problema 3. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $1 < b \leq c^2 \leq a^{10}$, şi

$$\log_a b + 2\log_b c + 5\log_c a = 12.$$

Să se arate că

$$2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a \geq 21.$$

Soluţie Fie $x = \log_a b$, $y = 2\log_b c$, $z = 5\log_c a$. Din ipoteză rezultă că $x, y, z > 0$ şi $x + y + z = 12$.. 1p

De asemenea, obţinem $xyz = 10\log_a b \log_b c \log_c a = 10$............... 1p

Din $b \leq c^2$ deducem $2\log_b c \geq 1$, iar din $c^2 \leq a^{10}$ rezultă $5\log_c a \geq 1$, aşadar $y, z \geq 1$, de unde $x \leq 10$ 2p

Să observăm că

$$2\log_a c + 5\log_c b + 10\log_b a = xy + xz + yz = x(y+z) + yz = x(12-x) + \frac{10}{x}$$

....2p

Inegalitatea $x(12-x) + \frac{10}{x} \geq 21$ este echivalentă cu $(x-1)^2(x-10) \leq 0$, evident adevărată 1p

Problema 4. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Să se determine numerele complexe z care verifică relaţiile

a) $z^n + z^{n-1} + \ldots + z^2 + |z| = n$;

b) $|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + |z|^2 + z = nz^n$.

Soluţie. Observaţia că din enunţ rezultă $n > 2$ nu se noteaza.

Din condiţia a) deducem

$$n = |z^n + z^{n-1} + \ldots + z^2 + |z|| \leq |z|^n + |z|^{n-1} + \ldots + |z|^2 + |z|,$$

de unde $|z| \geq 1$. .... 2 puncte

Din b) deducem

$$n|z|^n \leq |z| + |z|^2 + \ldots + |z|^{n-1} < 1 + |z| + \cdots + |z|^{n-1},$$

.... 2 puncte

şi apoi $|z| = 1$ .... 2 puncte

Introducand in b) ajungem la o contradictie .... 1 punct