Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
CLASA a XI-a

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct

Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b > 0$. Notăm $u_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $n \geq 1$. Atunci:

A $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ **B** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = b$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a + b$ **D** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \dfrac{a+b}{2}$ **E** $(u_n)_{n\geq 1}$ nu are limită

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că şirul $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent, pentru orice şir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci funcţia f este:

A continuă **B** crescătoare **C** descrescătoare **D** mărginită **E** constantă

3. Dacă funcţia continuă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface relaţia

$$5 + n^4 \left[f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n+1}{n}\right) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) f\left(\frac{n+1}{n}\right) \right] = \left(n^2 + 2\right)^2,$$

pentru orice număr natural nenul n, atunci numărul $f(1)$ este egal cu:

A -2 **B** -1 **C** 0 **D** 1 **E** 2

4. Şirul $x_n = n - \sum\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{\pi}{n+k}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limita:

A ∞ **B** 1 **C** $\pi^2/4$ **D** $\pi^2/2$ **E** 0

Problemele **5** şi **6** se referă la următorul enunţ:
Fie M mulţimea matricelor pătrate de ordinul 3 cu elementele egale cu -1 sau 1.

5. Numărul elementelor mulţimii M este egal cu:

A 8 **B** 9 **C** 81 **D** 256 **E** 512

6. Fie $D = \{\det(A) |\ A \in M\}$. Numărul elementelor mulţimii D este egal cu:

A 2 **B** 3 **C** 8 **D** 9 **E** 13

7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det(A + 2B) = \det(B + 2A)$, iar matricea A este inversabilă. Atunci:

A $\det(B) = 0$ **B** $\det(B) = \det(A)$ **C** $\det(B) = -\det(A)$ **D** $B^2 = \mathrm{Tr}(B) \cdot B$ **E** $|\det(B) - \det(A)| = 2$

8. Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, definim matricea $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Atunci:

A există $n \geq 2$ astfel ca $\det(A_n) = 0$ **B** există $n \geq 2$ astfel ca $Tr(A_n) = 3$
C există $n \geq 2$ astfel ca A_n să fie neinversabilă **D** $A_{1010}^2 = A_{2020}$
E suma elementelor matricei A_{20} este 212

9. Fie $n \geq 2$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă cu proprietatea că suma elementelor fiecărei linii este egală cu 1. Notăm cu E matricea coloană din $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ cu toate elementele egale cu 1. Atunci

A $\det(A - I_n) > 0$ **B** suma elementelor matricei A^{-1} este $2n$
C suma elementelor matricei A^3 este n^3 **D** $\det(A^T - I_n) \neq 0$
E $AE = E$

10. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu x_n unica soluţie pozitivă a ecuaţiei $x^n + nx = 1$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} n\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$ este egală cu:
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** e **E** ∞

11. Se consideră mulţimea de matrice $\left\{ X(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & 2a \\ -a & 1-a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$.
Fie $P = X(1) \cdot X(2) \cdot \ldots \cdot X(2021)$, $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Atunci:
A există $t \in (10^{500}, 10^{1000}]$ astfel încât $P = X(t)$
B există $t \in (10^{1000}, 10^{2000}]$ astfel încât $P = X(t)$
C există $t \in (10^{2000}, 10^{4000}]$ astfel încât $P = X(t)$
D există $t \in \mathbb{R}$, $t > 10^{4000}$, astfel încât $P = X(t)$
E nu există $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $P = X(t)$

12. Fie matricele inversabile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $n \geq 2$, astfel încât $A + B$ este inversabilă, cu $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$. Atunci $\mathrm{Tr}(A^{-1}B + AB^{-1})$ este:
A 0 **B** 1 **C** 2 **D** n **E** $-n$

13. Numărul funcţiilor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea lui Darboux şi verifică relaţia $f^2(x) = x^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, este:
A infinit **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

14. Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu proprietăţile $\det(A) = 1$ şi $\mathrm{Tr}(A) = -1$, are loc relaţia:
A $\det(I_3 - A) \geq 0$ **B** $\det(I_3 + A) \geq 0$ **C** $\mathrm{Tr}(A^{-1}) \geq 0$
D $\mathrm{Tr}(A^3) \geq 0$ **E** $\det(I_3 - A^2) \geq 0$

15. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2^2} + \cdots + \frac{1}{n+2^n} \right)$ este:
A 0 **B** 1/2 **C** $\ln 2$ **D** 1 **E** ∞

16. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \setminus \{-I_3, I_3\}$ cu proprietatea $A^6 = I_3$. Notăm cu A^* adjuncta matricei A. Atunci:
A $A^{2021} = I_3$ **B** $\det[A^2 - (A^*)^2] = 0$ **C** $\det[A^2 - (A^*)^2] < 0$
D $\det[A^2 - (A^*)^2] > 0$ **E** matricea $A^{2022} - I_3$ este inversabilă

17. Fie $f : [0, \infty) \to (0, \infty)$ o funcţie continuă, cu $f(0) = 2$. Considerăm un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $x_0 > 0$, definit prin relaţia de recurenţă $x_{n+1} = x_n + f\left(\frac{1}{x_n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$. Notăm $y_n = \frac{x_n}{n}$, $n \geq 1$. Atunci:
A $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$ **B** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ **C** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 1$ **D** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 2$ **E** $(y_n)_{n\geq 1}$ nu are limită

18. Fie $a > 0$ şi funcţiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea $ax \leq f(x) + g(y) \leq ay$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$. Rezultă că funcţiile f şi g satisfac condiţia:
A sunt de monotonii diferite **B** sunt ambele mărginite
C sunt ambele monoton crescătoare **D** sunt ambele monoton descrescătoare
E una dintre funcţii este constantă

19. Fie şirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definit prin $x_0 = \frac{1}{2}$ şi $x_{n+1} = x_n^3 - x_n^2 + 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Atunci şirul $y_n = (x_0 x_1 \cdots x_n)\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, are limita:
A 1 **B** $\sqrt{2}$ **C** 2 **D** $2 + \sqrt{2}$ **E** ∞

20. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{pmatrix}$, având elementele numere reale nenule.

Dacă $(36a + 8b + 6c + 25d)^2 = 2021\sqrt{|\det(A)|}$ atunci raportul $\frac{a+b+c}{d}$ este egal cu:

A 2021/75 **B** 5 **C** 3 **D** 2 **E** 1/2

21. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel ca $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$. Ştiind că există $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$, astfel încât $(AB)^k = (BA)^k$, atunci matricea BA este:

A $\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ **B** $\begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ **C** $\begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$ **D** I_2 **E** O_2

22. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă cu proprietatea $f(f(x)) = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă $f(1) = 2021$, atunci limita $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ este egală cu:

A 0 **B** 2021 **C** 1 **D** ∞ **E** $-\infty$

Problemele **23** şi **24** se referă la următorul enunţ:

Fie $k \in \mathbb{N},\ k \geq 2$. Presupunem că $G = \{A_1, A_2, \cdots, A_k\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este o mulţime de k matrice inversabile de ordinul n, cu proprietăţile $A_iA_j \in G$, pentru oricare $i, j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, şi $\sum\limits_{i=1}^{k} Tr(A_i) = 0$.

23. Are loc relaţia:

A $O_n \in G$ **B** $A_1^{-1} \notin G$ **C** $I_n \in G$ **D** $A_1A_2\cdots A_k \notin G$ **E** alt răspuns

24. Notăm $A = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i$. Atunci:

A $A = O_n$ **B** $A = I_n$ **C** $A^2 = 2I_n$ **D** $A^2 = kI_n$ **E** alt răspuns