



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ o funcție surjectivă.

- Demonstrați că f are cel puțin un punct de discontinuitate.
- Arătați că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0, 1]$, atunci f are cel puțin două puncte de discontinuitate.

Problema 2. Fie \mathcal{F} mulțimea perechilor de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ și există matricele $C_1, C_2, \dots, C_k \in \{A, B\}$ astfel încât $C_1 C_2 \cdots C_k = O_2$. Pentru $(A, B) \in \mathcal{F}$, notăm $k(A, B)$ cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiția de mai sus.

- Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$, astfel încât $\det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0$ și $k(A, B) = p + 2$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $AB^p A = O_2$.
- Demonstrați că pentru orice $k \geq 3$ există $(A, B) \in \mathcal{F}$ astfel încât $k(A, B) = k$.

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în $x = 0$, care verifică inegalitatea

$$f(x + y) + f(xy) \geq f(x) + f(y),$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Timp de lucru 4 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.



MINISTERUL EDUCAȚIEI



SOCIETATEA DE ȘTIINȚE
MATEMATICE DIN ROMÂNIA



Olimpiada Națională de Matematică Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a XI-a – soluții și bareme

Problema 1. Fie $f : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ o funcție surjectivă.

a) Demonstrați că f are cel puțin un punct de discontinuitate.

b) Arătați că, dacă f admite limită în orice punct din intervalul $[0, 1]$, atunci f are cel puțin două puncte de discontinuitate.

Soluție.

a) Conform teoremei lui Weierstrass, dacă f este continuă pe intervalul $[0, 1]$, atunci $f([0, 1]) = [m, M]$, unde $m = \min_{x \in [0, 1]} f(x) \in (0, 1)$ și $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x) \in (0, 1)$. Prin urmare, $f([0, 1]) \neq (0, 1)$, deci f nu este surjectivă. Contradicție. Deci f are cel puțin un punct de discontinuitate. 2p

b) Presupunem că f are limită în orice punct din $[0, 1]$. Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Cum f este surjectivă și $\frac{1}{n+1} \in (0, 1)$, există $a_n \in [0, 1]$ astfel ca $f(a_n) = \frac{1}{n+1}$. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ astfel determinat este mărginit. Conform Lemei lui Cesàro, șirul admite un subșir convergent $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a \in [0, 1]$. Dacă f ar fi continuă în a , atunci

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k_n + 1} = 0.$$

Contradicție. Deci f este discontinuă în a 2p

Analog, pe baza surjectivității lui f , putem construi un șir $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu termenii în $[0, 1]$, astfel ca $f(b_n) = 1 - \frac{1}{n+1} \in (0, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, care admite un subșir convergent $(b_{\ell_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} b_{\ell_n} = b \in [0, 1]$. Dacă f ar fi continuă în b , atunci

$$f(b) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_{\ell_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\ell_n + 1}\right) = 1.$$

Contradicție. Deci f este discontinuă în b 2p

Arătăm că $a \neq b$.

Cum $f(a) \in (0, 1)$, există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $f(a_{k_n}) = \frac{1}{k_n + 1} < f(a)$, $\forall n \geq n_1$. Rezultă $a_{k_n} \neq a$, $\forall n \geq n_1$. Cum f are limită în punctul a , obținem $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_{k_n}) = 0$.

Cu un raționament analog, deducem $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_{\ell_n}) = 1$.

Rezultă $a \neq b$, deci f are cel puțin două puncte de discontinuitate. 1p

Problema 2. Fie \mathcal{F} mulțimea perechilor de matrice $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ cu proprietatea că există $k \in \mathbb{N}^*$ și există matricele $C_1, C_2, \dots, C_k \in \{A, B\}$ astfel încât $C_1 C_2 \cdots C_k = O_2$. Pentru $(A, B) \in \mathcal{F}$, notăm $k(A, B)$ cel mai mic număr $k \in \mathbb{N}^*$ care satisface proprietatea din definiția de mai sus.

a) Fie $(A, B) \in \mathcal{F}$, astfel încât $\det(A) = 0$, $\det(B) \neq 0$ și $k(A, B) = p + 2$, cu $p \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $AB^p A = O_2$.

b) Demonstrați că pentru orice $k \geq 3$ există $(A, B) \in \mathcal{F}$ astfel încât $k(A, B) = k$.

Soluție.

a) $k(A, B) > 1$ și $\det(A) = 0$ implică $A \neq O_2$ și $\text{rang}(A) = 1$ 1p
 Deoarece $k(A, B) = p + 2$, există matricele $C_1, C_2, \dots, C_{p+2} \in \{A, B\}$ cu proprietatea $C_1 C_2 \cdots C_{p+2} = O_2$. Dacă $C_1 = B$, atunci $C_2 \cdots C_{p+2} = B^{-1} (B C_2 \cdots C_{p+2}) = O_2$, ceea ce contrazice minimalitatea lui $k(A, B)$. Similar, dacă presupunem $C_{p+2} = B$, atunci $C_1 C_2 \cdots C_{p+1} = (C_1 C_2 \cdots C_{p+1} B) B^{-1} = O_2$, în contradicție cu minimalitatea lui $k(A, B)$. Deci $C_1 = C_{p+2} = A$ 1p
 Presupunem prin absurd că există $i \in \{2, \dots, p + 1\}$ astfel ca $C_i = A$. Fie matricele $X = C_1 \cdots C_{i-1}$ și $Y = C_{i+1} \cdots C_{p+2}$. Avem deci $XAY = O_2$. Din inegalitatea lui Frobenius, obținem

$$\text{rang}(XA) + \text{rang}(AY) \leq \text{rang}(XAY) + \text{rang}(A) = 1.$$

Atunci $XA = O_2$ sau $AY = O_2$, în contradicție cu minimalitatea lui $k(A, B)$. Prin urmare $C_i = B$, $i = 2, \dots, p + 1$. Rezultă $AB^p A = O_2$ 2p

b) Fie $k = p + 2$, unde $p \in \mathbb{N}^*$ este arbitrar, fixat. Considerăm matricele din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ și } M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definim matricea $B = (2^p - 1)PMP^{-1}$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$, avem

$$\begin{aligned} B^n &= (2^p - 1)^n P M^n P^{-1} = (2^p - 1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2^p \end{pmatrix} = \\ &= (2^p - 1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p - 2^n & 2^{p+n} - 2^p \\ 1 - 2^n & 2^{n+p} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$AB^n A = (2^p - 1)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^p - 2^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci $AB^n A = O_2$ dacă și numai dacă $n = p$. Din a), deducem $k(A, B) = p + 2 = k$.

..... 3p

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile în $x = 0$, care verifică inegalitatea

$$f(x + y) + f(xy) \geq f(x) + f(y),$$

pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

Soluție. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile din enunț. Definim funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ prin $g(x) = f(x) - f(0)$, $x \in \mathbb{R}$. Atunci g este derivabilă în origine, $g(0) = 0$ și

$$g(x + y) + g(xy) \geq g(x) + g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Din (1) obținem inegalitățile

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \geq \frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y > 0; \quad (2)$$

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \leq \frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y < 0. \quad (3)$$

.....1p
Din (1) rezultă de asemenea

$$g(x) + g(-y(x + y)) \geq g(x + y) + g(-y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

de unde obținem

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \leq \frac{g(-y(x + y))}{y} - \frac{g(-y)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y > 0; \quad (4)$$

$$\frac{g(x + y) - g(x)}{y} \geq \frac{g(-y(x + y))}{y} - \frac{g(-y)}{y}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \forall y < 0. \quad (5)$$

.....2p
Din ipoteză, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = g'(0) \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru $x \in \mathbb{R}^*$, au loc limitele

$$\lim_{y \searrow 0} \left(\frac{g(y)}{y} - \frac{g(xy)}{y} \right) = \lim_{y \searrow 0} \frac{g(y)}{y} - x \lim_{y \searrow 0} \frac{g(xy)}{xy} = g'(0)(1 - x)$$

și

$$\lim_{y \searrow 0} \left(\frac{g(-y(x + y))}{y} - \frac{g(-y)}{y} \right) = - \lim_{y \searrow 0} (x + y) \cdot \frac{g(-y(x + y))}{-y(x + y)} + \lim_{y \searrow 0} \frac{g(-y)}{-y} = g'(0)(1 - x).$$

Atunci, din inegalitățile (2) și (4), prin aplicarea criteriului clește, rezultă că funcția g este derivabilă la dreapta în oricare $x \in \mathbb{R}^*$, cu derivata la dreapta $g'_d(x) = g'(0)(1 - x)$. Similar, din inegalitățile (3) și (5), prin aplicarea criteriului clește, rezultă că funcția g este derivabilă la stânga în oricare $x \in \mathbb{R}^*$, cu derivata la stânga $g'_s(x) = g'(0)(1 - x)$. Rezultă că g este derivabilă pe \mathbb{R} , cu $g'(x) = g'(0)(1 - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 2p

Deducem: $g(x) = -\frac{g'(0)}{2}(x-1)^2 + \frac{g'(0)}{2}$, $x \in \mathbb{R}$1p

Notăm $a = -\frac{g'(0)}{2}$ și $b = f(0) - a$. Atunci $f(x) = g(x) + f(0) = a(x-1)^2 + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$. În acest caz, inegalitatea din ipoteză se reduce la $ax^2y^2 \geq 0$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Rezultă că funcțiile f care satisfac condițiile din enunț sunt de forma:

$$f(x) = a(x-1)^2 + b, \quad x \in \mathbb{R},$$

unde $a \geq 0$ și $b \in \mathbb{R}$1p

Notă. Pentru indicarea funcției f de forma de mai sus, fără justificare, se acordă 1p.

Problema 4. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel ca $A^2 + B^2 = 2AB$. Arătați că

$$\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n),$$

pentru orice $x \in \mathbb{C}$.

Soluția 1.

Analizăm cazul când matricele A și B sunt inversabile.

Din relația $A^2 + B^2 = 2AB$ obținem $AB^{-1} + A^{-1}B = 2I_n$. Notăm $X = A^{-1}B$. Relația devine $BX^{-1}B^{-1} = 2I_n - X$. Prin urmare, pentru orice $x \in \mathbb{C}$, avem

$$\det(2I_n - X - xI_n) = \det(BX^{-1}B^{-1} - xI_n) = \det(B(X^{-1} - xI_n)B^{-1}) = \det(X^{-1} - xI_n).$$

Rezultă că matricele $2I_n - X$ și X^{-1} au același spectru. Fie $Y = I_n - X$. Atunci avem $2I_n - X = I_n + Y$ și $X^{-1} = (I_n - Y)^{-1}$, deci matricele $I_n + Y$ și $(I_n - Y)^{-1}$ au spectrul comun.....2p

Pentru o matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notăm cu $\sigma(M)$ mulțimea valorilor sale proprii.

Fie $\alpha \in \sigma(Y)$. Atunci $1 + \alpha \in \sigma(I_n + Y) = \sigma[(I_n - Y)^{-1}]$. Rezultă că există $\beta \in \sigma(Y)$ astfel ca $1 + \alpha = (1 - \beta)^{-1}$, deci $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$. Prin urmare, $\frac{\alpha}{1 + \alpha} \in \sigma(Y)$. Prin inducție,

obținem $\frac{\alpha}{1 + k\alpha} \in \sigma(Y)$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Dacă presupunem, prin absurd, $\alpha \neq 0$, atunci ar rezulta că Y ar avea o infinitate de valori proprii. Contradicție. Deci $\sigma(Y) = \{0\}$, de unde $\det(X) = \det(I_n - Y) = 1$. Rezultă $\det(A) = \det(B)$3p

Analizăm cazul general. Relația din ipoteză poate fi scrisă

$$(A - xI_n)^2 + (B - xI_n)^2 = 2(A - xI_n)(B - xI_n).$$

Dacă $x \in \mathbb{C}$ nu este valoare proprie pentru A și B , atunci matricele $A - xI_n$ și $B - xI_n$ sunt inversabile. În conformitate rezultatul anterior, obținem $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$. Această egalitate polinomială este adevărată pentru o infinitate de numere complexe.

Ca urmare $\det(A - xI_n) = \det(B - xI_n)$, $\forall x \in \mathbb{C}$2p

Soluția 2.

Fie $\lambda \in \mathbb{C}$. Notăm $A_\lambda = A - \lambda I_n$ și $B_\lambda = B - \lambda I_n$. Conform ipotezei, obținem relația $A_\lambda^2 + B_\lambda^2 = 2A_\lambda B_\lambda$ 1p
 Prin inducție, se demonstrează relațiile

$$A_\lambda^{i+1} = [(i+1)A_\lambda - iB_\lambda]B_\lambda^i, \quad i \in \mathbb{N}^*,$$

$$B_\lambda^{i+1} = A_\lambda^i[(i+1)B_\lambda - iA_\lambda], \quad i \in \mathbb{N}^*.$$

.....2p
 Rezultă $\text{rang}(A_\lambda^{i+1}) \leq \text{rang}(B_\lambda^i)$, $\text{rang}(B_\lambda^{i+1}) \leq \text{rang}(A_\lambda^i)$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$ 1p
 Dacă λ este o valoare proprie a matricei A , notăm cu a ordinul său de multiplicitate, iar dacă λ nu este o valoare proprie a matricei A , atunci considerăm $a = 0$. Similar, dacă λ este o valoare proprie a matricei B , notăm cu b ordinul său de multiplicitate și alegem $b = 0$ în caz contrar. Pentru $i \in \mathbb{N}^*$ suficient de mare, rangurile matricelor A_λ^i și B_λ^i se stabilizează astfel: $\text{rang}(A_\lambda^i) = n - a$, respectiv $\text{rang}(B_\lambda^i) = n - b$. Rezultă $n - a \leq n - b$ și $n - b \leq n - a$, de unde $a = b$ 2p
 Deducem că matricele A și B au aceleași valori proprii, cu ordine de multiplicitate identice, deci au același polinom caracteristic. Astfel, obținem concluzia.....1p