Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională GAZETA MATEMATICĂ
Etapa II - 20 martie 2021
Clasa a XII-a

Timp de lucru 180 de minute
Fiecare problemă se punctează cu 1 punct
Alegeţi varianta de răspuns. Pentru fiecare întrebare, un singur răspuns este cel corect.

1. Fie operaţia ”$*$” definită prin $x * y = xy - 5x - 5y + m$. Mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului real m pentru care operaţia ”$*$” este lege de compoziţie pe mulţimea $A = [5, \infty)$ este:

A $\{30\}$ **B** $(-\infty, 30]$ **C** $[30, \infty)$ **D** $\mathbb{R} \setminus \{30\}$ **E** $\emptyset$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ o funcţie continuă şi F primitiva ei cu proprietatea că $F(0) = 0$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty} xF\left(\frac{1}{x}\right)$ este:

A 0 **B** $f(1)$ **C** Nu există limita **D** $f(0)$ **E** ∞

3. Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie bijectivă. Pe $\mathbb{R}$ definim legea ”$*$” prin $x * y = f\left(2021 \cdot f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y)\right)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Elementul neutru al acestei legi este:

A $f(0)$ **B** $f(2021)$ **C** $f(1)$ **D** $f\left(\frac{1}{2021}\right)$ **E** Nu există

4. Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 2x + 3}\, dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$ este egală cu:

A 0 **B** ∞ **C** $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{3}$ **E** $\frac{1}{2}$

5. Fie $(G, \circ)$ şi $(H, *)$ două grupuri cu câte trei elemente. Numărul izomorfismelor de grupuri $f : G \longrightarrow H$ este:

A 2 **B** 1 **C** 9 **D** 6 **E** 0

6. Fie A mulţimea tuturor funcţiilor continue $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\int_0^1 f^2(x)\, dx \le 1$. Dacă $M = \max\left\{\int_0^1 xf(x)\, dx \,\middle|\, f \in A\right\}$, valoarea lui M este:

A 1 **B** $\frac{1}{3}$ **C** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D** $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **E** Nu există

7. O lege de compoziţie ”$\circ$” definită pe o mulţime $M \subset \mathbb{R}$ se numeşte *autodistributivă* dacă $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ (x \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in M$. Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$. O condiţie necesară şi suficientă ca legea de compoziţie ”$\circ$” definită pe $\mathbb{R}$ prin $x \circ y = ax + by$ să fie autodistributivă este:

A $a + b = 1$ **B** $a = b$ **C** $a = -b$ **D** $a = b^2$ **E** $a^2 = b$

8. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă şi F o primitivă a ei astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$. Se ştie că există $a\in\mathbb{R}^*$ şi $b\in\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x)-xf(x))=b$. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}(F(x)-ax)$ este:

A 0 **B** a **C** b **D** $a+b$ **E** $a-b$

9. Fie mulţimea $A=\{1,2,3,4,5\}$. Numărul legilor de compoziţie comutative care se pot defini pe A este:

A 15^5 **B** 5^5 **C** 15^{15} **D** 5^{15} **E** 5^3

10. Fie $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie continuă, strict crescătoare, astfel încât $\int\limits_a^b f(x)\,dx=0$. Fie $F:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Pentru fiecare $k\in\mathbb{N}$ definim mulţimea

$$A_k=\{m\in\mathbb{R}\,|\text{ ecuaţia } F(x)=m \text{ are exact } k \text{ soluţii reale distincte}\}.$$

Care dintre următoarele propoziţii este falsă?

A $A_2\neq\emptyset$ **B** $A_0\neq\emptyset$ **C** $A_1\neq\emptyset$ **D** A_1 are cel puţin două elemente **E** $A_3=\emptyset$

11. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu 63 elemente, iar $f:G\longrightarrow G$ un endomorfism cu proprietatea că $(f\circ f\circ f)(x)=x$, pentru orice $x\in G$. Fie mulţimea $M=\{x\in G\,|\,f(x)=x\}$. Considerăm propoziţiile:
E1: $M\neq\emptyset$.
E2: M are exact un element.
E3: M poate avea exact 3 elemente.
E4: M poate avea 63 elemente.
Numărul de propoziţii adevărate este egal cu:

A 3 **B** 1 **C** 2 **D** 0 **E** 4

12. Fie $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o funcţie derivabilă şi strict descrescătoare, iar F o primitivă a ei. Fie $a,b,c,d\in\mathbb{R}$, cu $a<b<c<d$ şi $a+d=b+c$. Care dintre următoarele propoziţii este adevărată?
A $F''(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
B $F(b)\leq\max\{F(a),F(d)\}$.
C $F(c)\leq\max\{F(a),F(d)\}$.
D $F(a)+F(d)\leq F(b)+F(c)$.
E $F(a)+F(d)\geq F(b)+F(c)$.

13. Fie $\mathcal{D}=\{f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,|\,f\text{ este derivabilă}\}$ şi $\mathcal{P}=\{g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\,|\,g\text{ admite primitive}\}$. Se ştie că $(\mathcal{D},+)$ şi $(\mathcal{P},+)$ sunt grupuri abeliene. Definim aplicaţia $T:\mathcal{D}\to\mathcal{P}$ prin relaţia $T(f)=f'$. Fie propoziţiile:
E1: T este morfism de grupuri.
E2: T este morfism surjectiv.
E3: T este morfism injectiv.
E4: T este izomorfism de grupuri.
Câte dintre aceste propoziţii sunt adevărate?

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

14. Numărul numerelor reale x care verifică egalitatea $\int\limits_0^x \sin\left(\dfrac{2t}{t^2+1}\right)dt=0$ este

A 0 **B** 1 **C** 2 **D** 3 **E** 4

15. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziţie asociativă "$\perp$" prin $x \perp y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Definim şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ prin $a_n = \frac{5}{2} \perp \frac{8}{3} \perp \frac{11}{4} \perp ... \perp \frac{3n+2}{n+1}$, pentru orice $n \geq 1$. Valoarea limitei $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ este

A 1 **B** 2 **C** 3 **D** ∞ **E** Alt răspuns

16. Fie $a_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^n x} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Valoarea lui L este:

A 0 **B** $\sqrt{2}$ **C** $+\infty$ **D** $\frac{\pi}{2}$ **E** Limita nu există.

17. Fie A mulţimea tuturor valorilor posibile ale numărului natural $n \geq 3$, pentru care ecuaţia $x^2 = x + \widehat{1}$ admite soluţie unică în $\mathbb{Z}_n$. Atunci:
A $A = \emptyset$.
B A are exact două elemente.
C A are o infinitate de elemente.
D A conţine doar numere pare.
E A are un singur element.

18. Valoarea integralei $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x + \sin^2 x + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx$ este

A $\frac{\pi}{4}$ **B** $\frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}$ **C** $\frac{\pi}{4}(1 + \ln 2)$ **D** $2 \ln 2$ **E** Alt răspuns

19. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu elementul neutru e. Pentru un număr $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $H_n = \{x \in G | x^n = e\}$. Fiind date două numere $m, n \in \mathbb{N}^*$, definim mulţimea

$$H_m H_n = \{ab \,|\, a \in H_m, b \in H_n\}.$$

Care dintre următoarele propoziţii este adevărată în orice grup abelian G?
A $H_m H_n = H_{(m,n)}$, unde (m, n) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor m şi n.
B $H_m H_n = H_{\min\{m,n\}}$.
C $H_m H_n = H_{\max\{m,n\}}$.
D $H_m H_n = H_{[m,n]}$, unde $[m, n]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor m şi n.
E Niciuna de mai înainte.

20. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ patru numere reale distincte, $M = \{a, b, c, d\}$, iar funcţia $F : M^6 \longrightarrow \mathbb{R}$ fie definită prin $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 + x_4 + x_5 + x_6$. Numărul maxim posibil de elemente ale imaginii $\mathrm{Im}(F)$ este:

A 240. **B** 360. **C** 400. **D** 480. **E** 720.

21. Fie $(A, +, \cdot)$ un inel cu proprietatea $\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{2021 \text{ de } 1} = 0$. Fie $a, b \in A$ două elemente, astfel încât $ab = ba$, pentru care există $m, n \in \mathbb{N}$, impare, cu $a^m = b^n = 1$. Fie propoziţiile:
E1: $1 + 1$ este inversabil.
E2: $a + b$ este inversabil.
Atunci:
A Ambele propoziţii sunt false.
B Doar E1 este adevărată.
C Doar E2 este adevărată.
D Ambele propoziţii sunt adevărate.
E Ipotezele problemei sunt insuficiente pentru a stabili cu exactitate valorile de adevăr ale propoziţiilor

E1 şi E2.

22. Fie $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2 + \sin^2 x}$. Notăm cu F o primitivă a acestei funcţii. Atunci $F(\pi) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ este egal cu

A 0 **B** $-\text{arctg}\,\dfrac{2}{\pi}$ **C** $\arcsin\dfrac{2}{\pi}$ **D** $\text{arctg}\,\dfrac{2}{\pi}$ **E** $-\arcsin\dfrac{2}{\pi}$

23. Fie $\mathcal{D} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | \, f \text{ este derivabilă}\}$. Se ştie că $(\mathcal{D}, +, \cdot)$ este inel. Fie S un subinel cu proprietatea că orice element al lui S este fie funcţie convexă, fie funcţie concavă. Fie $g \in S$. Atunci:
A Dacă g este constantă, atunci $g(x) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
B g este o funcţie constantă.
C Funcţia g poate fi strict crescătoare.
D Funcţia g poate fi strict descrescătoare.
E Nu există un astfel de subinel.

24. Fie funcţiile continue $f, g, h : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $\int_0^{x+y} f(t)\,dt = \int_0^x g(t)\,dt + \int_0^y h(t)\,dt$, pentru orice $x, y \geq 0$. Care dintre următoarele enunţuri este fals?
A Există funcţii f, g, h care îndeplinesc condiţiile din ipoteză.
B Toate cele trei funcţii pot fi constante.
C Printre funcţiile f, g, h pot exista şi funcţii neconstante.
D Funcţiile f, g, h sunt mărginite.
E $f(x) = g(x) = h(x)$, pentru orice $x \geq 0$.