OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020

Barem - Clasa a IX-a

SUBIECTUL I

$\left[x^2\right]\cdot\left\{1+x^2\right\}=x^2-1 \Leftrightarrow \left[x^2\right]\cdot\left\{x^2\right\}=\left[x^2\right]+\left\{x^2\right\}-1 \Leftrightarrow$ 2p

$\Leftrightarrow \left(\left[x^2\right]-1\right)\cdot\left(\left\{x^2\right\}-1\right)=0$ 3p

Cum $\left\{x^2\right\}\neq 1 \Rightarrow \left[x^2\right]=1$ 1p

cu soluția $x\in\left(-\sqrt{2},-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right)$ 1p

SUBIECTUL II

Din $a,b,c\geq 1$ avem că $a\geq\sqrt{a}$ și celelalte, inegalitatea devine

$$\frac{a}{a+2\sqrt{b}+c}+\frac{b}{b+2\sqrt{c}+a}+\frac{c}{c+2\sqrt{a}+b}\geq\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{b+2c+a}+\frac{c}{c+2a+b}$$ 2p

Arătăm că $\dfrac{a}{a+2b+c}+\dfrac{b}{b+2c+a}+\dfrac{c}{c+2a+b}\geq\dfrac{3}{4}$.

Amplificăm fiecare fracție cu numărătorul, aplicăm Lema Titu și avem:

$$\frac{a^2}{a^2+2ba+ca}+\frac{b^2}{b^2+2cb+ab}+\frac{c^2}{c^2+2ac+bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2ba+ca+b^2+2cb+ab+c^2+2ac+bc}$$ 2p

Prin calcul direct $\dfrac{(a+b+c)^2}{a^2+2ba+ca+b^2+2cb+ab+c^2+2ac+bc}\geq\dfrac{3}{4}$ este echivalentă cu

$a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$ 3p

SUBIECTUL III

Presupunem că este progresie geometrică

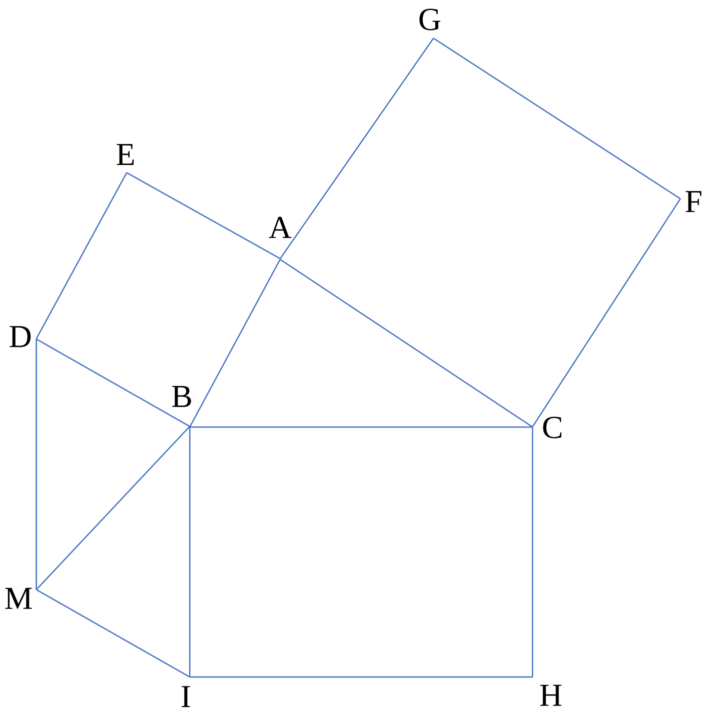
$\Rightarrow (a+b)^2=c\left(2c+\dfrac{ab}{c}\right)\Rightarrow a^2+ab+b^2=2c^2$..2p

$a,b,c\in\mathbb{Q}^*\Rightarrow a=\dfrac{m}{s},b=\dfrac{n}{s},c=\dfrac{k}{s},$ cu $m, n, k\in\mathbb{Z}^*, s\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m^2+m\cdot n+n^2=2k^2$ 1p

$$\Rightarrow\begin{cases} m=2^{\alpha}\cdot m_1,\ \alpha\in\mathbb{N},\ m_1\in 2\mathbb{Z}+1\\ n=2^{\beta}\cdot n_1,\ \beta\in\mathbb{N},\ n_1\in 2\mathbb{Z}+1\\ k=2^{\gamma}\cdot k_1,\ \gamma\in\mathbb{N},\ k_1\in 2\mathbb{Z}+1\end{cases}\Rightarrow 2^{2\alpha}\cdot m_1^2+2^{\alpha+\beta}\cdot m_1\cdot n_1+2^{2\beta}\cdot n_1^2=2^{2\gamma+1}\cdot k_1^2$$

Putem alege $\alpha\leq\beta\Rightarrow 2^{2\alpha}/2^{2\gamma+1}\Rightarrow\alpha\leq\gamma\ \Rightarrow m_1^2+2^{\beta-\alpha}\cdot m_1\cdot n_1+2^{2(\beta-\alpha)}\cdot n_1^2=2^{2(\gamma-\alpha)+2}\cdot k_1^2$, fals (impar=par!) 4p

SUBIECTUL IV



a) $\Delta BIM \equiv \Delta CBA(LUL) \Rightarrow BM = AG$ și $\widehat{MBA} \equiv \widehat{GAB} \Rightarrow BM \| AG$ deci $BMAG$ paralelogram.

.... 2p

b) Fie T centrul de greutate al ΔABC

$\overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TG}+\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{CH} = \vec{0}$

Deci T centrul de greutate al ΔDEF 3p

c) $\vec{0} = \overrightarrow{TD}+\overrightarrow{TG}+\overrightarrow{TH} = \overrightarrow{TC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AH}$ deci se poate forma triunghi cu lungimile celor trei segmente................. 2p

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANŢA, 08.02.2020

Barem - Clasa a X-a

SUBIECTUL I

$9^x+40^x=24^x+25^x \Leftrightarrow 40^x-24^x-\left(25^x-9^x\right)=0 \Leftrightarrow \left(5^x-3^x\right)\left(8^x-5^x-3^x\right)=0$ 4p

Din $5^x=3^x \Rightarrow x=0$ 1p

Din $5^x+3^x=8^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{8}\right)^x=1$ şi folosind faptul că membrul stâng reprezintă o funcţie strict descrescătoare, deci injectivă, avem că $x=1$ este soluţie unică.................................... 2p

SUBIECTUL II

$\sqrt{(x+1)(x+2)}+\sqrt{7x+2}\cdot\sqrt{8x+4}+\sqrt{11x+6}\cdot\sqrt{12x+12}=\sqrt{(19x+9)(21x+18)} \Leftrightarrow$

$\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}+\sqrt{7x+2}\cdot\sqrt{8x+4}+\sqrt{11x+6}\cdot\sqrt{12x+12}=\sqrt{19x+9}\cdot\sqrt{21x+18}$

Este adevărată din condiţiile de existenţă! 1p

Aplicăm CBS:

$\left(\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x+2}+\sqrt{7x+2}\cdot\sqrt{8x+4}+\sqrt{11x+6}\cdot\sqrt{12x+12}\right)^2 \le$

$\le (x+1+7x+2+11x+6)(x+2+8x+4+12x+12)=(19x+9)(21x+18)$ 3p

Deci trebuie să avem egalitate $\Rightarrow \frac{x+1}{x+2}=\frac{7x+2}{8x+4}=\frac{11x+6}{12x+12}$ 1p

De aici $x\in\{0,\ 4\}$ care verifică! 2p

SUBIECTUL III

$\Leftarrow$ Evident..2p

$\Rightarrow$ Solutia 1

Presupunem prin reducere la absurd $z_1\neq 0$ si $z_2\neq 0$. Fie $A(z_1),B(z_2)\neq O(0)$. Bisectoarea unghiului opus la vârf lui $\sphericalangle AOB$ intersectează $C(O,1)$ în punctul $M(z)$. Atunci $m(\sphericalangle MOA)\ge 90^0,\ m(\sphericalangle MOB)\ge 90^0 \Rightarrow \quad MA\ge MO,\ MB\ge MO \Rightarrow |z-z_1|>1,\ |z-z_2|>1$, fals $\Rightarrow z_1=0$ sau $z_2=0$.

Dacă $z_2=0 \Rightarrow |z-z_1|\le 0,\ (\forall)z\in\mathbb{C},\ |z|=1$. Dacă presupunem că $z_1\neq 0 \Rightarrow A(z_1)\neq O(0) \Rightarrow$ semidreapta opusa lui $(OA$ intersectează $C(0,1)$ în $M(z) \Rightarrow O\in(AM) \Rightarrow MA>MO \Rightarrow |z-z_1|>1$, fals, deci $z_1=0$ 5p

Soluţia 2

$(z-z_1)(z-z_2)=z^2-az+b$, cu $z_1+z_2=a,\ z_1z_2=b$. Dacă

$|z|=1 \Rightarrow |-z|=1 \Rightarrow \begin{cases}|z^2-az+b|\le 1\\ |z^2+az+b|\le 1\end{cases}, (\forall)z\in C(O,1) \Rightarrow$

$\left|z^2-az+b\right|+\left|z^2+az+b\right|\le 2$, dar $\left|2\left(z^2+b\right)\right|\le\left|z^2-az+b\right|+\left|z^2+az+b\right|\Rightarrow\left|z^2+b\right|\le 1,\ (\forall)z\in C(O,1)$.

Dar $\{z\in C\,\|z|=1\}=\{z^2\,\|z|=1\}$ (dacă $|z|=1$, ecuația $u^2=z$ are ca soluții rădăcini pătrate ale lui z deci $|u|=1$) iar de aici $\Rightarrow|z+b|\le 1,\ (\forall)z\in C(O,1)\Rightarrow 2\operatorname{Re}\left(\overline{b}\cdot z\right)+|b|^2\le 0,\quad\forall z\in C(O,1)$. Presupunem prin absurd că $b\ne 0$ si pentru $z=\frac{|b|}{\overline{b}}\Rightarrow 2\operatorname{Re}\left(\overline{b}\cdot\frac{|b|}{\overline{b}}\right)+|b|^2\le 0$, fals $\Rightarrow b=0$

$\Rightarrow\left|z^2-az\right|\le 1,\ (\forall)z\in C(O,1)\Rightarrow|z-a|\le 1,\ (\forall)z\in C(O,1)\Rightarrow a=0\Rightarrow z_1+z_2=0=z_1z_2\Rightarrow z_1=z_2=0\ldots$ 5p

SUBIECTUL IV

Presupunem că există funcțiile *g* și *h*

Cum *f* este bijectivă, este și inversabilă deci putem înlocui pe *n* cu $f^{-1}(n)$ și avem

$n=g(f^{-1}(n))h(f^{-1}(n)),\ \forall n\in M$

Notăm $G,\ H:M\to M,\ G=g\circ f^{-1},\ H=h\circ f^{-1}\Rightarrow G(n)H(n)=n,\ \forall n\in M$

Cum *g* injectivă avem că *G* este injectivă și cum *h* este surjectivă, avem că *H* este surjectivă 3p

Ordonăm elementele mulțimii *M*: $n_1<n_2<\ldots$

Din $G(n_1)H(n_1)=n_1\ \ G(n_1),\ H(n_1)\ge n_1\ge 1\Rightarrow G(n_1)=H(n_1)=1$ 1p

Din $G(n_2)H(n_2)=n_2$ și $G(n_2)\ge n_2$ (G fiind injectivă) $\Rightarrow H(n_2)\le 1\Rightarrow H(n_2)=1\Rightarrow G(n_2)=n_2$

Se arată prin inducție matematică faptul că $H(n)=1\Rightarrow G(n)=n,\ \forall n\in M$, contradicție cu faptul că *H* este surjectivă! 3p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANȚA, 08.02.2020

Barem - Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Se arată că $AB - BA = \alpha \cdot I_3,\ \alpha \in \mathbf{R}$ 3p

$Tr\left(AB - BA\right) = Tr(AB) - Tr(BA) = 0$ și $Tr(\alpha I_3) = 3\alpha \Rightarrow 0 = 3\alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow AB = BA$..........4p

SUBIECTUL II

Presupunem că $p \neq q$. Înmulțim stânga/dreapta cu A în $p \cdot AB + q \cdot BA = I_n \Rightarrow pABA + qBA^2 = A$ și $pA^2B + qABA = A$ 2p

Dar $A^2 = r \cdot B^2 \Rightarrow pABA + qrB^3 = A,\ prB^3 + qABA = A \Rightarrow (p-q)ABA = (p-q)rB^3$ 2p

Din $p \neq q \Rightarrow ABA = rB^3$ 1p

Din $pABA + qBA^2 = A$ deducem $prB^3 + qrB^3 = A$ adică A și B comută, contradicție! 2p

SUBIECTUL III

Fie șirul $(a_n)_{n\geq 2}$ definit prin $a_n = \sqrt[n]{n!} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - arctg\sqrt[n]{2020}\right),\ \forall n \in \mathbf{N},\ n \geq 2$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{4} - arctg\sqrt[n]{2020}}{tg\left(\frac{\pi}{4} - arctg\sqrt[n]{2020}\right)} \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - arctg\sqrt[n]{2020}\right)\sqrt[n]{n!} = \text{ .... 2p}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \sqrt[n]{2020}}{1 + \sqrt[n]{2020}} \sqrt[n]{n!} = \frac{-1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2020^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \text{ .... 2p}$$

$$= \frac{-1}{2} \ln 2020 \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = -\frac{\ln 2020}{2e} \text{ .... 1p}$$

Am folosit criteriul rădăcinii pentru $\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$: $\dfrac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \to \dfrac{1}{e}$ 2p

SUBIECTUL IV

Soluție: Există două cazuri:

Caz I $(\exists) n_0 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_n > \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0$...............................3p

Caz II $(\forall) k \in \mathbb{N}^*, (\exists) n \geq k$ astfel încât $a_n \leq \frac{1}{n}$.........................4p

Caz I $a_n > \frac{1}{n}, \forall n \geq n_0 \Rightarrow \max\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} = a_n, \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq n_0$ si $a_n \geq 0 \Rightarrow (a_n)_{n\geq 0}$ convergent $\Rightarrow (a_n)_{n\geq 1}$ convergent .

Caz II Demonstrăm că $a_n \to 0$.

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{k} < \varepsilon$. Pentru $k \in \mathbb{N}^*, (\exists) n_0 \geq k$ astfel încât $a_{n_0} \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{k} < \varepsilon$.

Demonstrăm prin inducție $a_n \leq \frac{1}{n_0}, (\forall) n \geq n_0$. Etapa I) $P(n_0)$: $a_{n_0} \leq \frac{1}{n_0}$, adevărat.

Etapa II) $a_{n+1} \leq \max\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} \Rightarrow a_n \leq \frac{1}{n_0}$, dar $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \Rightarrow \max\left\{a_n, \frac{1}{n}\right\} \leq \frac{1}{n_0} \Rightarrow a_{n+1} \leq \frac{1}{n_0}$. Atunci $a_n \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – CONSTANŢA, 08.02.2020

Barem- Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Fie $G_p = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \middle| \hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbf{Z}_p \right\}$ unde $p \geq 3$ este un număr natural impar.

a) Calcul direct... 1p

b) Grup.. 2p

Exemplu de două matrice care nu comută 1p

c) Prin inducţie matematică, se demonstrează că $\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{a} & \hat{b} \\ \hat{0} & \hat{1} & \hat{c} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \hat{1} & \widehat{na} & \widehat{nb + \frac{n(n-1)}{2}ac} \\ \hat{0} & \hat{1} & \widehat{nc} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ (*)

De aici, p fiind impar, avem că $A^p = I,\ \forall A \in G_p$ 1p

Dacă p este prim, folosind relaţia (*) avem că $ord(A) = p,\ \forall A \neq I$ 1p

Dacă $ord(A) = p,\ \forall A \neq I$, presupunând că p este compus, rezultă $p = ms;\ m, s \geq 2$. Alegem $B = A^m \neq I \Rightarrow B^s = I$ şi $s < p$ deci contradicţie! 1p

SUBIECTUL II

a) Fie funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ f(z) = \left(e^{\operatorname{Re}(z)}, e^{\operatorname{Im}(z)}\right)$, arătăm că f este izomorfism de grupuri.....................3p

b) Prin reducere la absurd presupunem că există $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ astfel încât f bijectivă şi $f(z_1 \cdot z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2),\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$

f injectivă $\Rightarrow (\exists) z_1, z_2, z_3, z_4$ distincte, astfel încât
$f(z_1) = (1,1),\ f(z_2) = (-1,-1),\ f(z_3) = (1,-1),\ f(z_4) = (-1,1)$

Avem $f(z_k^2) = f(z_k)^2 = (1,1),\ k = \overline{1,4}$ şi $f(1) = (1,1)$ şi din injectivitate rezultă $z_k^2 = 1 \Rightarrow z_k \in \{-1,1\}$ fals, fiind distincte. 4p

SUBIECTUL III

$$\int_1^a \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx = 2\int_1^a \frac{1}{2\sqrt{x}\left(x\sqrt{x}+1\right)}dx = 2\int_1^{\sqrt{a}} \frac{1}{t^3+1}dt = 2\int_1^{\sqrt{a}} \frac{1}{(t+1)\left(t^2-t+1\right)}dt \text{ .... 2p}$$

Folosind descompunerea în fracţii simple avem că

$$\int_1^a \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}dx = \frac{1}{3}\ln\frac{a+2\sqrt{a}+1}{4(a-\sqrt{a}+1)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2\sqrt{a}-1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ .... 3p}$$

iar limita este $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}-\frac{2}{3}\ln 2$ 2p

SUBIECTUL IV

a) $I_1=0,\ I_2=0,\ I_3=\frac{\pi}{2}$ 2p

b) $I_n=\frac{1}{2^n}\sum\int_0^{2\pi}\cos\left(1\pm 2\pm\cdots\pm n\right)xdx$ și cum $\int_0^{2\pi}\cos kxdx=0,\ \forall k\in\mathbf{Z}^*$ avem că $I_n\neq 0$ dacă și numai dacă există o alegere a semnelor astfel încât $1\pm 2\pm\cdots\pm n=0$.

Dacă $n=4k$ folosim $p-(p+1)-(p+2)+(p+3)=0\Rightarrow I_n\neq 0$

Dacă $n=4k+3$ avem $1-2+3=0$ iar restul de $4k$ ca mai sus $\Rightarrow I_n\neq 0$

Dacă $n=4k+1$ avem $1\pm 2\pm\cdots\pm(4k+1)$ număr impar (avem $2k$ numere pare și $2k+1$ impare), deci diferit de zero $\Rightarrow I_n\neq 0$

Dacă $n=4k+2$ avem suma tot impară $\Rightarrow I_n\neq 0$ 3p

c) Din punctul (b) avem că $a_{4n}=2n,\ a_{4n+1}=2n,\ a_{4n+2}=2n,\ a_{4n+3}=2n+1$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$ 2p