MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Naţională, Piatra-Neamţ, 16 aprilie 2022

CLASA a IX-a

Problema 1. Se consideră a și b numere naturale nenule. Demonstrați că ecuația

$$x^2 + (a+b)^2 x + 4ab = 1$$

are soluții raționale dacă și numai dacă $a = b$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, astfel încât A' este mijlocul ipotenuzei, M mijlocul înălțimii AD, $D \in (BC)$ și $\{P\} = BM \cap AA'$.
Dacă notăm $\alpha = m(\widehat{PCB})$, să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin C \cdot \cos C.$$

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(y) = [g(x+y)],$$

oricare ar fi x, y numere reale.
(Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.)

Problema 4. Fie a, b, c, d numere naturale nenule, cu $a < b < c < d$ și $ad = bc$.
Demonstrați că

$$2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Națională, Piatra-Neamț, 16 aprilie 2022

CLASA a IX-a – soluții și bareme

Problema 1. Se consideră a și b numere naturale nenule. Demonstrați că ecuația

$$x^2 + (a+b)^2 x + 4ab = 1$$

are soluții raționale dacă și numai dacă $a = b$.

Soluție. Pentru $a = b$ numere naturale nenule ecuația se scrie $x^2 + 4a^2x + 4a^2 - 1 = 0$, cu soluțiile $x_1 = -1$ și $x_2 = 1 - 4a^2$ **1p**

Reciproc, să presupunem că ecuația $x^2 + sx + p = 0$, unde $s = (a+b)^2$ și $p = 4ab - 1$, admite soluții raționale. Atunci $\Delta = s^2 - 4p$ va fi pătrat perfect, deci $s^2 - 4p = n^2$, cu $n \in \mathbb{N}$. **1p**

Cum numerele s și n au aceeași paritate și $4p > 0$ deducem că $n < s$, deci $n \leqslant s - 2$. **3p**

Rezultă că $s^2 - 4p \leqslant (s-2)^2 \Leftrightarrow s \leqslant p + 1$, ceea ce este echivalent cu $(a+b)^2 \leqslant 4ab$. Deducem că $(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$ **2p**

Problema 2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A astfel încât A' este mijlocul ipotenuzei, M mijlocul înălțimii $AD,\ D \in (BC)$ și $\{P\} = BM \cap AA'$.

Dacă notăm $\alpha = m(\widehat{PCB})$, să se demonstreze că

$$\operatorname{tg} \alpha = \sin C \cdot \cos C.$$

Soluție.

Aplicăm teorema lui Menelaus în triunghiul $AA'D$, cu punctele B, M, P coliniare:

$$\frac{BA'}{BD} \cdot \frac{MD}{MA} \cdot \frac{PA}{PA'} = 1 \Leftrightarrow \frac{PA}{PA'} = \frac{BD}{BA'} = \frac{2BD}{BC} = \frac{2BD \cdot BC}{BC^2} = \frac{2AB^2}{BC^2} = 2\sin^2 C \ (1) \text{.....} \mathbf{2p}$$

Din teorema sinusurilor în triunghiurile PCA' și PCA obținem:

$$\frac{PA'}{\sin \alpha} = \frac{PC}{\sin 2B} \ (2), \text{ respectiv } \frac{PA}{\sin(C-\alpha)} = \frac{PC}{\sin C} \ (3). \text{..........} \mathbf{1p}$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă:

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{\sin(C-\alpha)}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin C} = \frac{\sin C \cos \alpha - \sin \alpha \cos C}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin C}. \text{..........} \mathbf{1p}$$

Ținând cont de relația (1) avem:

$(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} C) \cdot \sin 2B = 2\sin^2 C \Leftrightarrow (\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} C) \cdot 2\sin B \cos B = 2\sin^2 C \Leftrightarrow$
$(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} C) \cdot \sin B = \sin C$. **2p**

Așadar $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} C + \operatorname{tg} C = \dfrac{1}{\sin C \cos C}$, de unde concluzia. **1p**

Problema 3. Determinați funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pentru care există funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(x) + f(y) = [g(x + y)]$$

oricare ar fi x, y numere reale.

Am notat cu $[a]$ partea întreagă a numărului real a.

Soluție. Pentru $x \to (x + y),\ y \to 0$ în relația din enunț deducem

$$f(x + y) + f(0) = [g(x + y)] = f(x) + f(y)$$

.... **1p**

Notând $h(x) = f(x) - f(0)$ obținem $h(x + y) = h(x) + h(y)$ (ecuația lui Cauchy) **1p**

Deducem că, pentru orice $x_0 \in \mathbb{R}$, ales arbitrar și orice n natural, $h(nx_0) = nh(x_0)$.

Rezultă că $h(x_0) = h(n \cdot \frac{x_0}{n}) \Leftrightarrow h(\frac{x_0}{n}) = \frac{h(x_0)}{n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$...................... **2p**

Cum $2f(x) = [g(2x)] \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2h(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{2h(x_0)}{n} \in \mathbb{Z}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Alegând $n > |2h(x_0)|$ obținem că

$$0 \leq \left|2 \cdot h(\frac{x_0}{n})\right| = \left|\frac{2h(x_0)}{n}\right| < 1$$

de unde $h(\frac{x_0}{n}) = 0$, deci $h(x_0) = 0$. Cum x_0 a fost ales arbitrar obținem $h(x) = 0$ pentru orice x real. Deducem că $f(x) = f(0)$ iar cum $2f(x) = [g(2x)] \in \mathbb{Z}$ rezultă $f(x) = \frac{k}{2}$ pentru orice x real, unde k este un număr întreg fixat... **3p**

Problema 4. Fie a, b, c, d numere naturale nenule cu $a < b < c < d$ și $ad = bc$.

Demonstrați că

$$2a + \sqrt{a} + \sqrt{d} < b + c + 1$$

.

Soluție. Fie $b = a + x, c = a + y,\ d = a + z$ cu $0 < x < y < z$ numere naturale.

Atunci relația din enunț se scrie $a(a + z) = (a + x)(a + y)$. Deducem că $z = x + y + \dfrac{xy}{a} > x + y \Rightarrow z \geqslant x + y + 1$. Obținem astfel

$$a = \frac{xy}{z - x - y} \leqslant xy.$$

.... **2p**

Avem că $\dfrac{xy}{a} + a \leqslant xy + 1 \Leftrightarrow xy + a^2 \leqslant xya + a \Leftrightarrow (xy - a) + a(a - xy) \leqslant 0 \Leftrightarrow (xy - a)(1 - a) \leqslant 0$, adevărat.

Obținem astfel $d = a + z = x + y + \dfrac{xy}{a} + a \leqslant x + y + xy + 1 = (x + 1)(y + 1)$ **2p**

Inegalitatea din enunț se transcrie $\sqrt{a} + \sqrt{d} < x + y + 1$, iar prin ridicare la pătrat este echivalentă cu

$$a + d + 2\sqrt{ad} < x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y \quad (1)$$

Cum

$$a + d \leqslant xy + x + y + xy + 1,$$

iar din inegalitatea mediilor, întrucât $x < y$, avem:

$$2\sqrt{ad} \leqslant 2\sqrt{xy(x+1)(y+1)} < x(x+1) + y(y+1),$$

Adunând ultimele două relații, obținem (1). **3p**