

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-11.02.2023

Clasa a X-a

1. Să se arate că :

a) $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$,

b) $\sqrt[n]{n+1} > \sqrt[n+1]{n+2}$, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.

2. a) Dacă $a > b > 0$ și $\lg \frac{3a+4b}{3} = \frac{\lg(2a)+\lg(3b)}{2}$, să se calculeze $\frac{a}{b}$.

b) Fie $a = \log_7 98$ și $b = \log_2 28$. Arătați că $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} = 1$.

(G.M. 11 / 2022)

3. Fie funcția $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, $f(z) = 2\bar{z} + 3z$.

a) Să se calculeze $|f(2-i)|$;

b) Să se arate că funcția f este inversabilă și să se determine inversa f^{-1} .

4. a) Dacă $x, y, z \in \mathbf{C}$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, atunci

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = (x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z)(x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z).$$

b) Fie triunghiul echilateral ABC cu vârfurile de afixe a, b, c . Să se arate că
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

NOTĂ:

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.

Propunători:

prof. Pătrașcu Enache – C. N. „Unirea” - Focșani

prof. Bucur Mioara– C.E. “Mihail Kogălniceanu “- Focșani