

**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ****Faza locală-11.02.2023****Clasa a XII-a**

1) Fie mulțimile  $G_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  și  $G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$ .

- a) Arătați că  $G_1$  și  $G_2$  sunt grupuri comutative în raport cu înmulțirea numerelor complexe, respectiv cu înmulțirea matricelor pătratice de ordinul 2.  
b) Demonstrați că grupurile  $G_1$  și  $G_2$  sunt izomorfe.

\*\*\*

2) Se dă legea de compoziție "\*" definită prin  $x * y = x + y + xy$  pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Determinați  $a, b \in \mathbb{R}$ , știind că rădăcinile reale ale ecuației  $x^2 + ax + b = 0$  formează grup în raport cu legea de compoziție dată.

Dan Popoiu

3) Calculați integrala  $I = \int \frac{x(x^2 + 1)}{x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1} dx, x \in (1, \infty)$ .

(Supliment GM 10/2022)

4) Determinați funcția  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilă și care satisface relația

$$F'(\ln x) = x \left( 1 - \frac{2}{\ln x} \right)^2 \text{ pentru orice } x \in (1, \infty).$$

\*\*\*

**Problemele au fost selectate de prof. Daniela Sîrghie – C.N. “Al. I. Cuza”- Focșani**

**prof. Dan Popoiu – C.N. “Unirea”- Focșani**

**SUCCES!****NOTĂ:**

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.