Olimpiada Națională de Matematică Gazeta Matematică

Etapa locală, Focșani 11.02.2023
Barem Clasa a 11-a

Subiectul 1. a) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left[n(\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+.....\sqrt[n]{a_k}-k)\right]$, unde $a_1,a_2....a_k\in\mathbb{R}_+^*, k\in\mathbb{N}^*$

b) Fie $k\in\mathbb{N}^*$, numerele $a_1,a_2....a_k$ si $b_1,b_2....b_k\ \in\mathbb{R}_+^*$.

Dacă $\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+.....\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+.....\sqrt[n]{b_k}$,arătați că: $a_1\cdot a_2\cdot....\cdot a_k=b_1\cdot b_2\cdot....\cdot b_k$

Soluție a) $\lim_{n\to\infty}\left[n(\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+.....\sqrt[n]{a_k}-k)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{a_1}-1}{1/n}+\frac{\sqrt[n]{a_2}-1}{1/n}+.....\frac{\sqrt[n]{a_k}-1}{1/n}\right]$

$=\ln a_1+\ln a_2+...+\ln a_n=\ln(a_1a_2....a_n)$...3p

b) Din enunț $n(\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+.....\sqrt[n]{a_k}-k)=n(\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+.....\sqrt[n]{b_k}-k)$ 2p

$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{a_1}-1}{1/n}+\frac{\sqrt[n]{a_2}-1}{1/n}+.....\frac{\sqrt[n]{a_k}-1}{1/n}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{b_1}-1}{1/n}+\frac{\sqrt[n]{b_2}-1}{1/n}+.....\frac{\sqrt[n]{b_k}-1}{1/n}\right]$.......................................1p

De unde $\ln(a_1a_2....a_n)=\ln(b_1b_2....b_n)$ de unde cerința...1p

Subiectul 2. Fie S_n mulțimea permutărilor de ordin n și H o submulțime nevidă a sa cu proprietatea: $x\cdot y\in H,\ \forall\, x,y\in H$. Să se arate că inversa oricărei permutări din H, este tot în H.

Soluție: $x\in H\Longrightarrow x^k\in H,\forall\, k\in N^*$...2p
S_n *mulțime finită*, N^* *infinită* $\Longrightarrow\ \exists\, p\in N^*$ *astfel încât* $x^p=e$.. 2p
$x^p,x^{p-1}\in H\Longrightarrow x^p\cdot\ x^{p-1}\in H\Longrightarrow(x^p)^2\cdot x^{-1}\in H\Longrightarrow x^{-1}\in H$..3p

Subiectul 3. Se consideră o matrice $A\in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^3=O_3$. Arătați că matricele $A-I_3$ și $A+I_3$ sunt inversabile și determinați inversele lor.

Soluție: $(A-I_3)(A^2+A+I_3)=A^3-I_3=-I_3$ 2p
De aici $A-I_3$ inversabilă cu $(A-I_3)^{-1}=-(A^2+A+I_3)$...2p
Analog $(A+I_3)(A^2-A+I_3)=A^3+I_3=I_3$ de unde $(A+I_3)^{-1}=A^2-A+I_3$ 3p

Subiectul 4. Fie un șir $(a_n)_{n>0}$ de numere naturale nenule distincte. Arătați ca șirul $(x_n)_{n>0}$ definit

Prin $x_n=\cos\frac{1}{a_1}+\cos\frac{1}{a_2}+....+\cos\frac{1}{a_n}-n$, este un șir convergent cu limita sa in intervalul (-1,0).

Soluție: $x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{1}{a_k}-1\right)=-\sum_{k=1}^{n}\left(2\sin^2\frac{1}{2a_k}\right)$, de unde $x_n<0$ 1p

Dar $x_{n+1}-x_n=-\sum_{k=1}^{n+1}\left(2\sin^2\frac{1}{2a_k}\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(2\sin^2\frac{1}{2a_k}\right)=-2\sin^2\frac{1}{2a_{k+1}}<0$ deci x_n descrescător................2p

Dar $2\sin^2 \frac{1}{2a_k} \leq 2\frac{1}{4a_k^2}$, deoarece $\sin x < x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$..1p

Cum a_k naturale distincte $x_n = -\sum_{k=1}^{n}\left(2\sin^2 \frac{1}{2a_k}\right) \geq -\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k^2}\right) > -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}+\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k(k-1)}\right)\right) > -\frac{7}{8}$ 2p

De unde finalizare cu x_n convergent și limita sa în intervalul (-1,0)..1p