OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Faza locală-11.02.2023

Clasa a XII-a

Bareme

1) a) G_1 grup comutativ……………………………..............................2p

G_2 grup comutativ ………………………………………………….2p

b) $|z|=1 \Rightarrow z=\cos\alpha+i\sin\alpha, \alpha\in[0,2\pi)$ …………………………...1p

Demonstrarea izomorfismului...2p

2) <u>Cazul 1</u>:ecuația are o singura rădăcină reală α ,deci grupul are un singur element care verifică relația $\alpha*\alpha=\alpha \Rightarrow \alpha\in\{0,-1\}$ 1p

Pentru $\alpha=0 \Rightarrow a=b=0$, iar pentru $\alpha=-1 \Rightarrow a=2, b=1$ 2p

<u>Cazul 2:</u> ecuația are două rădăcini reale distincte, cum legea de compoziție are elementul neutru 0, atunci una din soluții este 0, deci $b=0$ 1p

$x(x+a)=0 \Rightarrow x_1=0, x_2=-a$ 1p

Competăm tabla legii de compoziție și obținem

*	0	-a
0	0	-a
-a	-a	0

Deci $(-a)*(-a)=0 \Rightarrow -2a+a^2=0 \Rightarrow a=0$ fals! sau $a=2$

În concluzie, $(a,b)\in\{(0,0),(2,1),(2,0)\}$ 2p

3) $I=\int \frac{x^3+x}{(x^2-1)^3}dx$ …………………………………………………..….......2p

Scoțând factor comun forțat obținem $I=\int \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}dx$ ....….2p

Deci $I = \int \frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)'}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}dx = -\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)^{-2} + C$ 2p

Prin urmare $I = -\frac{x^2}{2\left(x^2-1\right)^2} + C$ 1p

4) $F'(\ln x) = x\left(1-\frac{2}{\ln x}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x}F'(\ln x) = \left(1-\frac{2}{\ln x}\right)^2$

Deci, $\left(F(\ln x)\right)' = \left(1-\frac{2}{\ln x}\right)^2$ 2p

$F(\ln x) = x\left(1-\frac{4}{\ln x}\right) + C$ 4p

Notăm $\ln x = t \Rightarrow F(t) = e^t\left(1-\frac{4}{t}\right) + C$ pentru orice $t > 0$..................1p