OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 11.02.2023
Clasa a V-a
Barem de corectare și notare

1. Într-o clasă sunt mai mult de 20 elevi și mai puțin de 30. Unii dintre elevi au vârsta de 10 ani și alții de 11 ani. Câți elevi sunt în clasă dacă suma vârstelor este 259 de ani, iar numărul elevilor de 10 ani este mai mic decât numărul elevilor de 11 ani?

Soluție

Notăm cu x = numărul elevilor de 10 ani, cu y = numărul elevilor de 11 ani,

x, y numere naturale

$20 < x + y < 30, \quad 10x + 11y = 259, \quad x < y$ ………………………………………….2p

$20 < x + y < 2y \Rightarrow 10 < y$ și $11y \leq 259 \Rightarrow y < 24$ 2p

$U(10x+11y) = U(10x) + U(11y) = 0 + U(y) = U(y)$ și $U(10x+11y) = U(259) = 9$

$U(y) = 9$ 1p

$y = 19$ și $x = 5$, $x + y = 24$ 2p

2. Fie $a = 32^5 \cdot 2^{36} - 12^{30} : 9^{15} - 4^{25} \cdot 8^3$ și $b = 3^{39} + 12^{39} : 2^{78} + 27^{13}$.

a) Arătați că numai unul dintre numerele a și b este pătrat perfect.

b) Demonstrați că $a < b$.

Soluție.

a) $a = 2^{59} = \overline{...8} \neq$ pătrat perfect……………………………………........................…2p

$b = 3^{40} = \left(3^{20}\right)^2 =$ pătrat perfect……………………..………….....................……2p

b) $a = 2^{59} < 2^{60} = 8^{20} < 9^{20} = 3^{40} = b$ ……………………….................…………….3p

Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

3.

a) Fie numărul $N = 3^{3n+4} \cdot 2^{n+2} + 3^{3n} \cdot 2^{n+4} - 3^{3n+1} \cdot 2^{n} + 17$, unde n este număr natural nenul. Aflați restul împărțirii lui N la 2022.

b) Fie $A = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2022$ și $B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2023$. Arătați că nu există niciun pătrat perfect între A și B.

(Gazeta Matematică/2022)

Soluție:

a)

$N = 3^{3n} \cdot 2^{n} \cdot \left(3^4 \cdot 2^2 + 2^4 - 3\right) + 17$ 1p

$N = 3^{3n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 337 + 17$

$N = 3^{3n-1} \cdot 2^{n-1} \cdot 2022 + 17$ 1p

Restul împărțirii lui N la 2022 este 17...1p

b)

$A = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2022 = 2 \cdot \left(1 + 2 + 3 + \ldots + 1011\right) = 2 \cdot \frac{1011 \cdot 1012}{2} = 1011 \cdot 1012$ 1p

$B = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2023 = 1 + (2+1) + (4+1) + \ldots + (2022+1)$

$B = 1 \cdot 1012 + A = 1012 + 1011 \cdot 1012 = 1012 \cdot \left(1 + 1011\right) = 1012^2$ 1p

Avem $1011^2 < 1011 \cdot 1012 < n < 1012^2 \Rightarrow n \neq$ pătrat perfect...2p

4. Determinați numărul $\overline{abcd}$ știind că $\overline{abcd}$ împărțit la $\overline{ab}$ dă câtul 101 și restul 3, iar $\overline{abcd}$ împărțit la $\overline{cd}$ dă câtul 87 și restul 22.

Soluție:

$\overline{ab} > 3,\ \overline{abcd} = 101\overline{ab} + 3 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = 101 \cdot \overline{ab} + 3 \Leftrightarrow \overline{cd} = \overline{ab} + 3$ 2p

$\overline{cd} > 22,\ \overline{abcd} = 87 \cdot \overline{cd} + 22 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} = 87 \cdot \overline{cd} + 22 \Leftrightarrow 100\overline{ab} = 86 \cdot \overline{cd} + 22$ ...2p

$100 \cdot \overline{ab} = 86 \cdot \left(\overline{ab} + 3\right) + 22 \Leftrightarrow 100 \cdot \overline{ab} = 86 \cdot \overline{ab} + 258 + 22 \Leftrightarrow 14 \cdot \overline{ab} = 280$ 2p

$\overline{ab} = 20,\quad \overline{cd} = 23$, atunci $\overline{abcd} = 2023$ 1p