Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 11.02.2023
Clasa a IX-a

Subiectul 1.

Fie $x, y, z \in (0, +\infty)$.

a) Să se arate că $\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x} \geq 6$;

b) Să se arate că $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$.

Barem:

a) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2 <=> (x-y)^2 \geq 0$ **1p**

$\frac{x+y}{z}+\frac{x+z}{y}+\frac{y+z}{x} \geq 6 <=> \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right) \geq 6$ **2p**

b) Notăm $y+z=a$, $x+z=b$, $x+y=c$, $a,b,c \in (0,+\infty)$

Se obțin $x=\frac{b+c-a}{2}$, $y=\frac{a+c-b}{2}$, $z=\frac{a+b-c}{2}$ **1p**

Inegalitatea din enunț devine $\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b}+\frac{a+b-c}{2c} \geq \frac{3}{2}$ **1p**

$<=> \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{a+b}{c} \geq 6$ (adevărat) **2p**

Subiectul 2.

Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră $S_n = \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{2n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2-n+1}}$.

a) Să se arate că $S_n = \sqrt{n^2+n+1}-1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Să se arate că $[S_n] = n-1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$;

c) Să se arate că $\{S_n\} \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 4$.

Barem:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{\sqrt{k^2+k+1}+\sqrt{k^2-k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k^2+k+1}-\sqrt{k^2-k+1}$ **1p**

$S_n = \left(\sqrt{3}-\sqrt{1}\right)+\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)+\ldots+\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}\right) = \sqrt{n^2+n+1}-1$ **1p**

b) $[S_n] = n-1 <=> n-1 \leq \sqrt{n^2+n+1}-1 < n$ **1p**

$<=> n^2 \leq n^2+n+1 < n^2+2n+1$ **1p**

c) $\{S_n\} = S_n - [S_n] = \sqrt{n^2+n+1}-n$ **1p**

$\frac{1}{2} < \{S_n\} < \frac{3}{5} <=> n + \frac{1}{2} < \sqrt{n^2+n+1} < n + \frac{3}{5} <=>$

$n^2 + n + \frac{1}{4} < n^2 + n + 1 < n^2 + \frac{6}{5}n + \frac{9}{25}$ **1p**

Prima inegalitate este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ iar a doua este echivalentă cu

$\frac{16}{25} < \frac{1}{5}n <=> 16 < 5n$, adevărat pentru $n \geq 4$ **1p**

Subiectul 3.

În triunghiul ABC se cunosc $AB = AC = 20$ și $BC = 24$. Notăm cu T intersecția medianei CE cu înălțimea BD. Să se exprime în funcție de $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{AC}$, următorii vectori:

a) $\overrightarrow{AD}$;

b) $\overrightarrow{AT}$.

Barem:

a) $A_{ABC} = 192 => BD = \frac{96}{5}$ **1p**

$AD = \frac{28}{5}$ și $CD = \frac{72}{5}$ **1p**

$AD = \frac{7}{25}AC => \overrightarrow{AD} = \frac{7}{25}\overrightarrow{AC}$ **1p**

b) Aplicând teorema lui Menelaus în ΔABD se obține $\frac{BT}{TD} = \frac{25}{18}$ **2p**

$$\overrightarrow{AT} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{25}{18}\overrightarrow{AD}}{1 + \frac{25}{18}} = \frac{18\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{AC}}{43}$$ **2p**

Subiectul 4.

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu ortocentrul H. Notăm cu S și T punctele de intersecție dintre semidreptele $(BH$ respectiv $(CH$ și cercul circumscris triunghiului ABC.

Dacă $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH}$, arătați că ABC este triunghi echilateral.

Supliment Gazeta Matematică 2022

Barem:

$\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AH} <=> ASHT$ paralelogram **2p**

$=> AS \parallel TH, AT \parallel HS$ **1p**

$AS \parallel TH$ și $TH \perp AB => AS \perp AB => BS$ diametru **1p**

Analog CT diametru **1p**

$BS \cap CT = \{H\} => H$ centrul cercului circumscris în ΔABC **1p**

H ortocentru și centrul cercului circumscris $=> \Delta ABC$ echilateral **1p**