Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

Olimpiada Națională de Matematică Gazeta Matematică

Etapa locală, Focșani 11.02.2023
Clasa a 11-a

Subiecte

Subiectul 1. a) Calculați $\lim_{n\to\infty}\left[n(\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+.....\sqrt[n]{a_k}-k)\right]$, unde $a_1, a_2....a_k \in \mathbb{R}_+^*, k \in \mathbb{N}^*$

b) Fie $k \in \mathbb{N}^*$, numerele $a_1, a_2....a_k$ si $b_1, b_2....b_k \in \mathbb{R}_+^*$.

Dacă $\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{a_2}+.....\sqrt[n]{a_k}=\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{b_2}+.....\sqrt[n]{b_k}$,arătați că: $a_1\cdot a_2\cdot....\cdot a_k = b_1\cdot b_2\cdot....\cdot b_k$

(* *)*

Subiectul 2. Fie S_n mulțimea permutărilor de ordin n și H o submulțime nevidă a sa cu proprietatea: $x\cdot y\in H,\ \forall\, x,y\in H$. Să se arate că inversa oricărei permutări din H, este tot în H.

(* *)*

Subiectul 3. Se consideră o matrice $A\in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $A^3 = O_3$. Arătați că matricele $A - I_3$ și $A + I_3$ sunt inversabile și determinați inversele lor.

(* *)*

Subiectul 4. Fie un șir $(a_n)_{n>0}$ de numere naturale nenule distincte. Arătați ca șirul $(x_n)_{n>0}$ definit

Prin $x_n=\cos\frac{1}{a_1}+\cos\frac{1}{a_2}+....+\cos\frac{1}{a_n}-n$, este un șir convergent cu limita sa in intervalul (-1,0).

(GM 4/2023)

Propunători: *prof.* ***Oancia Silvia C.N.A.I.C.***
prof. ***Uleanu Cătălin C.N.A.I.C.***

NOTĂ: Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat de la 0 puncte la 7 puncte.