

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală, județul Timiș
15.02.2023

Clasa a VIII-a

1. a) Fie numărul real pozitiv x cu proprietatea $x + \frac{1}{x} = 2023$. Demonstrați că $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ este un număr natural.
b) Demonstrați că $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \in \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \right]$, pentru orice numere reale pozitive a și b .
2. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\{x\} - [x] = \frac{1}{2023}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x și $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .
b) Determinați numerele reale $x > 0$ și $y > 0$ știind că $\frac{3x+3y+1}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}} = 2$.
3. Considerăm cubul $ABCD A' B' C' D'$, punctul P pe diagonala BD' astfel încât $BD' = 3BP$ și centrul O al feței $BB' C' C$.
a) Arătați că punctele A , P și O sunt coliniare.
b) Dacă $AB = 6cm$, calculați distanța de la punctul C la planul (APB) .
4. a) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , există cel puțin un pătrat perfect care are n cifre și suma cifrelor 9. (De exemplu, 144 este pătrat perfect, are 3 cifre și suma cifrelor 9.)
b) Determinați numerele naturale s cu proprietatea că, oricare ar fi n număr natural nenul, există cel puțin un pătrat perfect cu n cifre și suma cifrelor s .
c) Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n , există cel puțin un pătrat perfect **impar** care are n cifre și suma cifrelor 9.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Timpul de lucru este de trei ore.
3. Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.

Succes!